МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

**Подготовка к прохождению теоретического этапа
Московского конкурса межпредметных навыков и знаний
«Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»
(номинация «Инженерный класс», Инженерно-техническое направление,
Авиастроительные классы, Космические классы,
задания №№ 2, 3, 6, 7, 10)**

Методические рекомендации для учащихся предпрофессиональных классов
и учителей профильных предметов (физика, математика, информатика)

Утверждено Факультетом довузовской подготовки

Москва
2023 год

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по решению заданий №№2 и 3 по предмету «Физика»
в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»,
номинация «Инженерный класс»,
Инженерно-техническое направление, Авиастроительные классы, Космические классы

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационного варианта по предмету «Физика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Теоретический этап Конкурса проводится в форме компьютерного тестирования. Во время выполнения работы разрешается использовать непрограммируемый калькулятор, таблицу физических величин. В контрольно-измерительных материалах используются задания базового и повышенного уровня сложности с кратким ответом. Уровень сложности заданий требует от исполнителя следующих привитых умений:

– анализировать и выдвигать предположения;

– составлять уравнения по текстовым формулировкам;

– характеризовать свойства тел, физические явления и процессы, используя физические законы;

– выявлять недостающие или избыточные данные в условии задач, обосновывать выбор метода решения задачи, необходимых законов и формул;

– решать расчётные задачи, выбирая адекватную физическую модель с использованием законов и формул, связывающих физические величины;

– выбирать рациональный способ решения задачи;

– решать алгебраические уравнения и системы;

– последовательно выполнять этапы решения задачи повышенной трудности;

– определять размерность физической величины, полученной при решении задачи;

– анализировать полученный результат.

Предложенные в демонстрационном варианте физические задачи имеют следующие усложнения:

– использование понятий и законов из разных разделов механики и электростатики, что делает эти задачи комбинированными и привносит в них межпредметную и прикладную направленность;

– необходимость проанализировать численные данные задачи для определения возможного вида движения тел;

– применение многоступенчатых алгебраических преобразований, требующих решения систем линейных уравнений, с последующим вычислением физических величин;

– применение элементов электротехники (использование строения и принципов функционирования плоского конденсатора);

– необходимость одновременного рассмотрения участия заряда в электростатическом и гравитационном взаимодействиях, его движения в нескольких плоскостях, применения законов сохранения заряда, импульса и/или энергии;

– использование понятия удельного заряда (q/m);

– преобразование единиц физических величин в единицы международной системы СИ и в кратные величины с учётом приставок и множителей.

Рекомендуется организовать решение задач по физике следующим способом:

1. Чтение условия не менее двух раз. Первое – ознакомительное, второе и последующие (при необходимости) – для выяснения конкретных деталей описанного события, составления или изучения рисунка (графика, схемы) и краткой записи условия с переводом значений всех величин в систему СИ (при необходимости).

2. Проникновение в суть рассматриваемого в условии физического явления: выяснение физической теории, описывающей явление, конкретных законов и принципов, основных формул, охватывающих известные и неизвестные величины, приведённые в условии, и физические константы.

3. Установление физической связи между величинами, приведенными в условии, и неизвестными величинами посредством системы уравнений, учитывая общее требование: количество уравнений в системе должно быть не меньше общего числа неизвестных физических величин в ней.

4. Решение системы уравнений и получение конечной формулы, выражающей искомую неизвестную величину через величины, указанные в условии, и известные константы.

5. Выполнение численных расчётов, приведение полученного результата к требуемому по условию задачи формату (с применением стандартных множителей и приставок) и проверка полученного значения.

При краткой записи условия задания необходимо сразу же выяснить размерность физических величин, перевести их в систему СИ. Иногда при решении задания не требуется краткой записи условия задачи, но это создаст трудности в построении математической модели физической ситуации задачи. Поэтому рекомендуется записывать «Дано» подробно и проводить анализ текста задания, корректный перевод текстовой формы условия физической задачи в математическую форму, правильное указание размерностей физических величин. Если задание решается в общем виде, то последний пункт рекомендаций по записи «Дано» допускается пропустить.

Далее идёт самый сложный этап – построение физической модели ситуации задачи. В физической модели отражается основная идея задания. В большинстве задач из разных разделов физики допускается возможность схематического или графического изображения физической ситуации, описанной в задаче. Даже если в условии этого не требуется, рисунок часто оказывается полезным. В предлагаемых задачах эта модель имеет вид чертежа или схемы электрического и, при необходимости, гравитационного взаимодействия. Если движение происходит в нескольких плоскостях, то дополнительные усилия должны быть направлены на анализ характера взаимодействий и видов движений в каждой плоскости, с целью построения математической модели (выбора адекватных уравнений), либо, возможно, на абстрагирование от каких-то несущественных для решения задачи элементов. Если рисунок прилагается к задаче в готовом виде, то все усилия должны быть направлены на его анализ и внесение необходимых обозначений физических величин (сил, ускорений и т. п.) с целью построения математической модели движения тел, записи необходимых уравнений и их преобразования к виду, оптимальному для решения.

В результате анализа физической модели необходимо записать базовые формулы физических понятий и законы, которые планируется использовать. Нужно описать каждую вновь вводимую переменную (известную или неизвестную) и указать, какой буквой она обозначается. Должен быть понятен смысл всех физических величин. Особенно это касается величин, которые обозначаются одинаковыми греческими или латинскими буквами (время и температура, электрический заряд и количество теплоты и т. п.). Необходимо их чёткое разграничение для верного подсчёта известных и неизвестных физических величин в задаче.

При описании решения учащиеся должны указать названия всех законов и границы, в которых они применяются. Важно правильно указать связи между законами, проиллюстрировать каждую связь математическими уравнениями. После построения системы алгебраических уравнений в явном или неявном виде (знак системы уравнений учащиеся могут не ставить), математическая модель решения задачи считается построенной. Нужно чёткое осознание учащимися, что число уравнений, должно быть равно числу неизвестных физических величин.

В дальнейшем решение задачи предполагает работу с алгебраическими уравнениями. На первое место в этом случае ставится знание математических формул, умения их преобразовывать, т.е. собственно математические умения.

Важно уметь объяснять каждую математическую выкладку и логический переход, так, чтобы была понятна логика решения: из какой формулы выражается конкретная физическая величина, куда она подставляется, какие происходят сокращения и преобразования формулы.

На следующем этапе решения задачи получают численное значение физических величин. Нужно проследить, чтобы вновь вводимые при построении модели постоянные были выражены в системе СИ и после проведения расчётов учащиеся получили результат в стандартном виде.

После получения численного результата его значение проверяется на соответствие физической реальности – результат должен быть разумным, согласовываться с условием задачи, искомая формула иметь соответствующую размерность и находиться в объективных границах этой величины, заданной физической реальностью. Необходимо сделать проверку разными способами: по размерности искомой физической величины, по решению задачи другим способом (если таковое возможно) и т. п.

Если задача предполагает несколько вариантов решения, то наиболее ценным будет тот, который предполагает самое рациональное решение – наиболее короткое, с одной стороны, и наиболее обоснованное – с другой. Только после этого учащийся переходит к записи ответа и завершению задачи.

Ученик может улучшить эффективность решения, если будет примерно представлять, насколько разные способы решения задач отличаются по трудоёмкости и по времени. Поэтому желательно в процессе подготовки рассмотреть с учениками все возможные варианты.

Проведём анализ решения заданий демонстрационного варианта.

Задание №2. У края шероховатой горизонтальной плоскости укреплён блок с пренебрежимо малой массой, через который перекинута невесомая нерастяжимая нить. К одному концу нити привязан груз массой $m_2 = 2$ кг, лежащий на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между грузом m_2 и горизонтальной плоскостью $\mu = 0{,}8$. На другом конце нити висит ведро массой $m_1 = 1$ кг с налитой в него водой массой $m_3 = 3$ кг (рис. 1). Систему изначально удерживают в неподвижном состоянии, а затем предоставляют самой себе, и в этот же момент включают отсчёт времени. Через время $\tau_1 = 3$ с после начала движения от ведра отваливается дно (массой дна можно пренебречь), и вода мгновенно выливается из ведра. Определите, через какое время с момента начала движения, ведро остановится. Ответ выразите в секундах, округлив до целого числа.

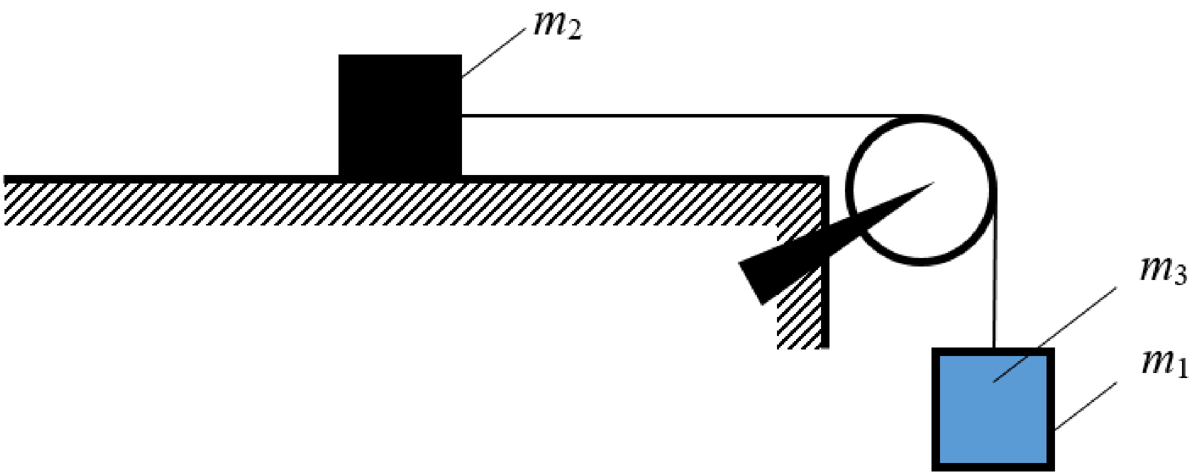

Рис. 1. Система тел (общий вид)

При наличии трения между грузом m_2 и горизонтальной плоскостью нужно определить, при какой минимальной суммарной массе $(m_1 + m_3)$ система сможет прийти в движение, если её изначально удерживают в неподвижном состоянии. Для этого расставим силы, действующие на тела системы, и рассмотрим случай, когда скорости и ускорения тел равны нулю. Отметим, что при отсутствии движения тел сила трения является силой трения покоя, которая направлена в сторону, противоположную скорости, которая появилась бы при отсутствии трения. Также в дальнейшем будем пренебрегать зависимостью силы трения скольжения от скорости, то есть сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя (рис. 2).

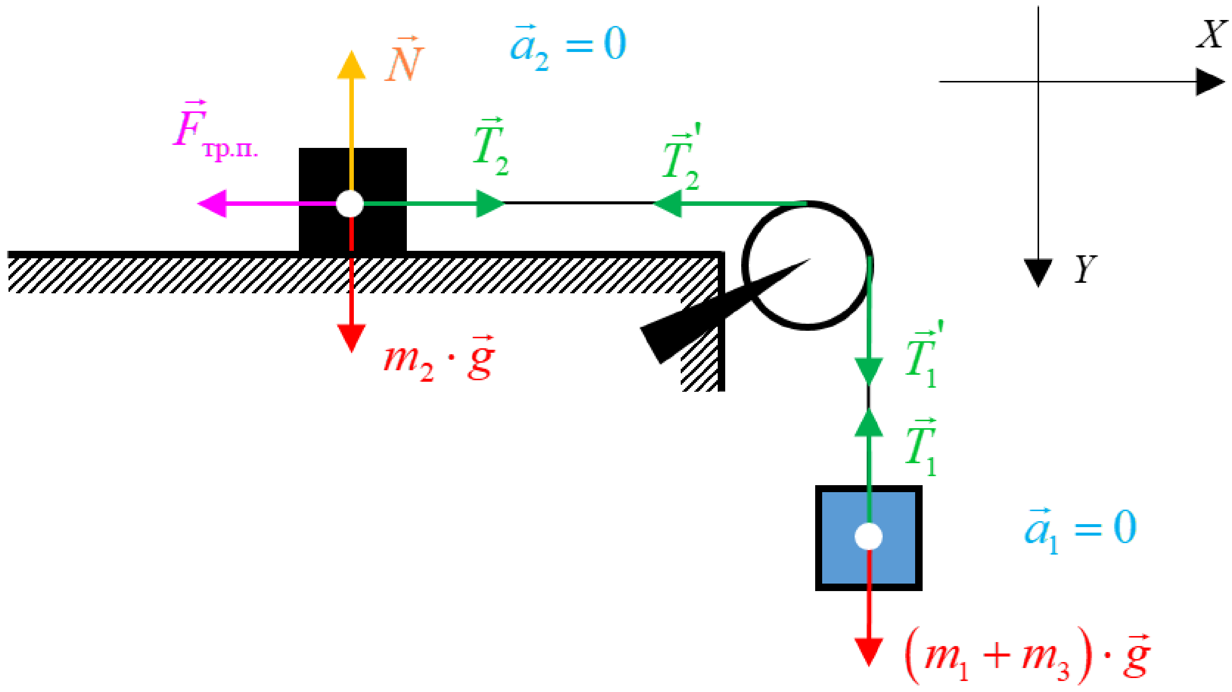

Рис. 2. Система тел в неподвижном состоянии

Уравнения второго закона Ньютона для грузов имеют вид:

$$\vec{T}_1 + (m_1 + m_3) \cdot \vec{g} = 0 \ ,$$

$$\vec{T}_2 + m_2 \cdot \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.п.}} = 0 \, .$$

Запишем эти уравнения в проекции на оси *X* и *Y*:

$$-T_1 + (m_1 + m_3) \cdot g = 0 \qquad (1),$$

$$m_2 \cdot g - N = 0 \qquad (2),$$

$$T_2 - F_{\text{тр.п.}} = 0 \qquad (3).$$

Невесомость нити позволяет считать силу натяжения вдоль нити постоянной по модулю. Неизменяемость силы натяжения при переходе через блок может быть доказана при условии, что массой блока можно пренебречь. Таким образом, выполняется соотношение:

$$T_1 = T_1' = T_2' = T_2 = T \qquad (4).$$

Решая систему из уравнений (1), (3), (4), находим:

$$F_{\text{тр.п.}} = (m_1 + m_3) \cdot g .$$

Модуль силы трения покоя может принимать любое значение от 0 до $F_{\text{тр.п.макс.}} = \mu \cdot N$. Таким образом, с учётом (2), получим условие для сохранения системой состояния покоя после предоставления её самой себе:

$$0 \le (m_1 + m_3) \cdot g \le \mu \cdot m_2 \cdot g ,$$

$$m_1 + m_3 \le \mu \cdot m_2 \qquad (5).$$

Анализ исходных данных показывает, что $m_1 + m_3 > \mu \cdot m_2$, т.е. при наличии воды в ведре сила трения будет являться силой трения скольжения, равной $\mu \cdot N$. Значит, суммарный груз $(m_1 + m_3)$ будет опускаться с ускорением, направленным вертикально вниз, а груз m_2 будет двигаться с ускорением, направленным вправо (рис. 3).

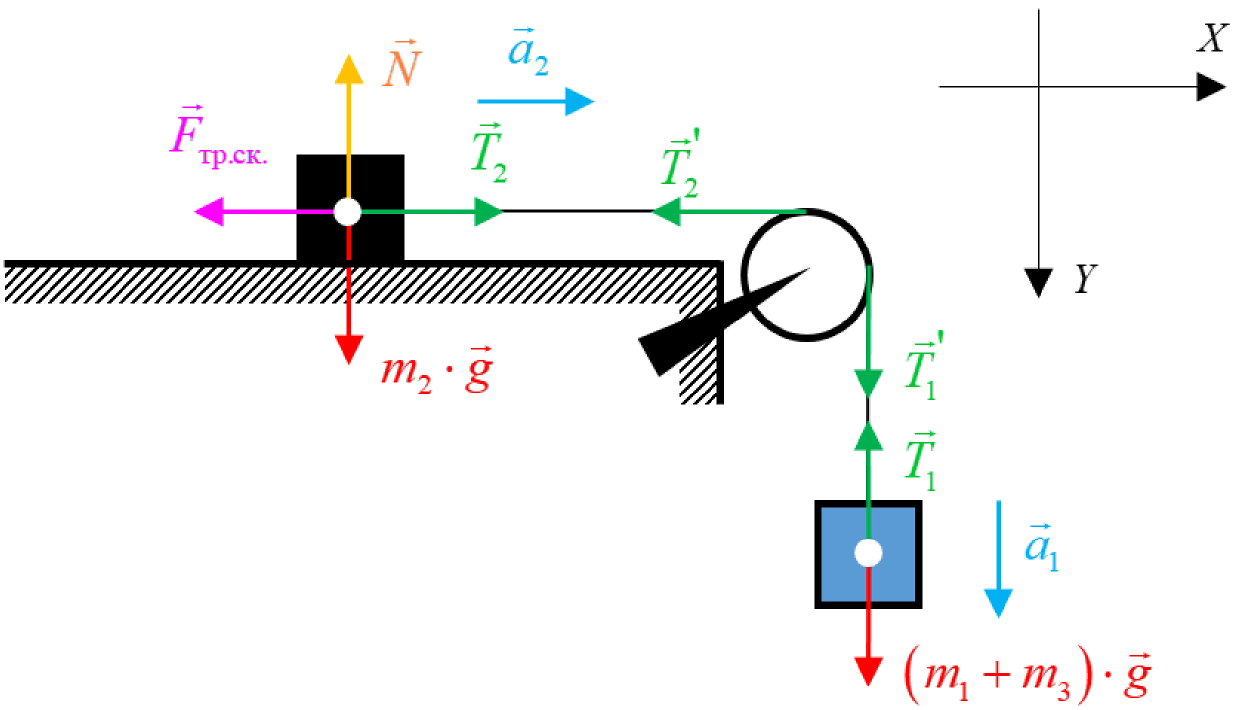

Рис. 3. Ускоренное движение системы тел

Уравнения второго закона Ньютона для грузов будут иметь вид:

$$\vec{T}_1 + (m_1 + m_3) \cdot \vec{g} = (m_1 + m_3) \cdot \vec{a}_1 ,$$

$$\vec{T}_2 + m_2 \cdot \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.ск.}} = m_2 \cdot \vec{a}_2 \ .$$

Запишем эти уравнения в проекции на оси X и Y:

$$-T_1 + (m_1 + m_3) \cdot g = (m_1 + m_3) \cdot a_1 \qquad (6),$$

$$m_2 \cdot g - N = 0 \qquad (7),$$

$$T_2 - F_{\text{тр.ск.}} = m_2 \cdot a_2 \qquad (8),$$

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu \cdot N \qquad (9).$$

Нерастяжимость нити позволяет считать одинаковыми по модулю скорости и ускорения всех её точек, поэтому будут одинаковыми модули ускорений грузов:

$$a_1 = a_2 = a \ . \qquad (10)$$

Решив систему из уравнений (6) – (10) с учётом (4), получим величину ускорения тел:

$$a = g \cdot \frac{m_1 + m_3 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \ .$$

За время τ_1 ведро с водой приобретёт (с учётом равенства нулю начальной скорости) скорость, равную

$$\upsilon_1 = a \cdot \tau_1 = g \cdot \frac{m_1 + m_3 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \tau_1 \ .$$

После того, как дно ведра отвалилось, к вертикальному участку нити осталось привязано только само ведро без воды, т.е. груз массой только m_1. При этом условие (5) примет вид: $m_1 < \mu \cdot m_2$. Таким образом, если бы вначале к вертикальному участку нити было прикреплено только ведро массой m_1, система тел не пришла бы в движение. Но к моменту выпадения дна и выливания воды ведро m_1 уже приобрело скорость υ_1. Это означает, что сила трения скольжения, приложенная к грузу m_2, будет тормозящей и через некоторое время τ_2 система тел остановится. Направление силы трения скольжения не изменится, так как она всегда направлена в сторону, противоположную скорости тела (рис. 4).

Уравнения второго закона Ньютона для грузов будут иметь вид:

$$\vec{T}_1 + m_1 \cdot \vec{g} = m_1 \cdot \vec{a}_1^{'} ,$$

$$\vec{T}_2 + m_2 \cdot \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.ск.}} = m_2 \cdot \vec{a}_2^{'} .$$

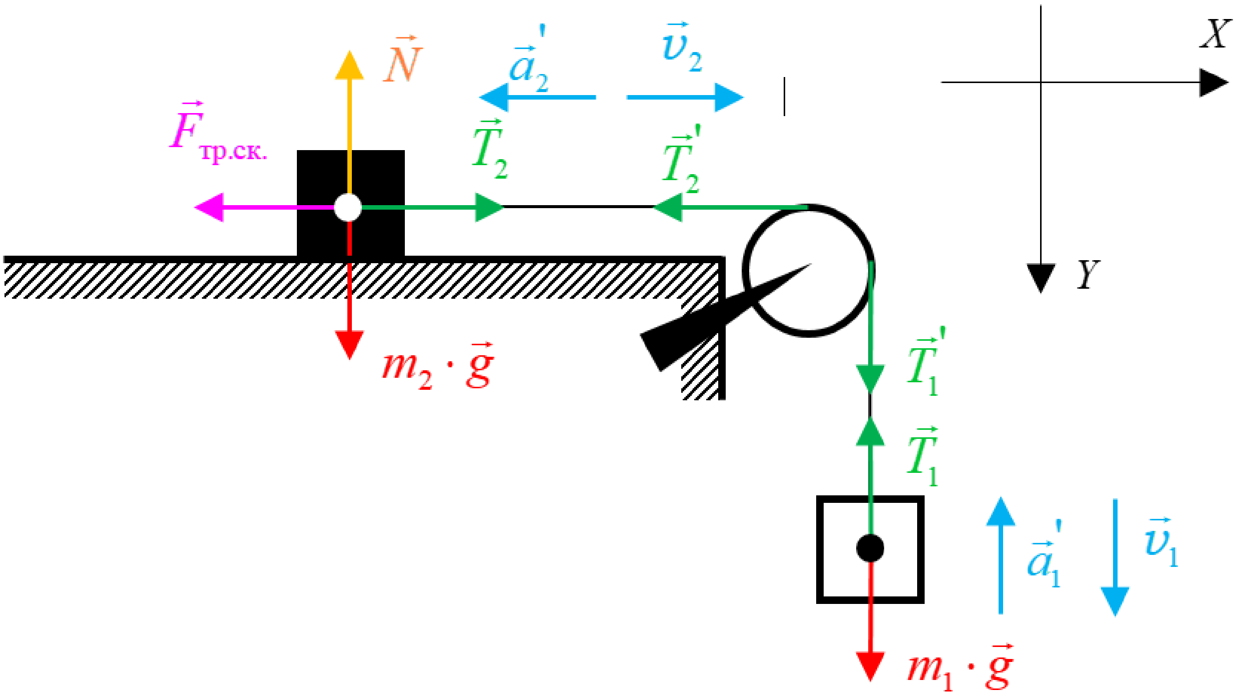

Рис. 4. Движение системы тел под действием тормозящей силы

Запишем эти уравнения в проекции на оси *X* и *Y*, а также учтём свойство нерастяжимости нити:

$$-T_1 + m_1 \cdot g = -m_1 \cdot a_1^{'} \quad (11),$$

$$m_2 \cdot g - N = 0 \quad (12),$$

$$T_2 - F_{\text{тр.ск.}} = -m_2 \cdot a_2^{'} \quad (13),$$

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu \cdot N \quad (14),$$

$$a_1^{'} = a_2^{'} = a^{'} \quad (15).$$

Решив систему из уравнений (11) – (15) с учётом (4), получим величину ускорения тел:

$$a' = g \cdot \frac{\mu \cdot m_2 - m_1}{m_1 + m_2}.$$

Время τ_2, за которое ведро остановится, найдём из кинематического уравнения для скорости:

$$0 = \upsilon_1 - a' \cdot \tau_2,$$

откуда

$$\tau_2 = \frac{\upsilon_1}{a'} = \frac{g \cdot \dfrac{m_1 + m_3 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \tau_1}{g \cdot \dfrac{\mu \cdot m_2 - m_1}{m_1 + m_2}} = \frac{\left(m_1 + m_3 - \mu \cdot m_2\right) \cdot \left(m_1 + m_2\right)}{\left(m_1 + m_2 + m_3\right) \cdot \left(\mu \cdot m_2 - m_1\right)} \cdot \tau_1 .$$

Рассчитаем время τ_2:

$$\tau_2 = \frac{\left(1 + 3 - 0{,}8 \cdot 2\right) \cdot \left(1 + 2\right)}{\left(1 + 2 + 3\right) \cdot \left(0{,}8 \cdot 2 - 1\right)} \cdot 3 = 6 \text{ с}.$$

Поскольку в задаче требуется найти время с момента начала движения, через которое, ведро остановится, то это время равно $\tau_1 + \tau_2 = 9$ с. Ответ получен в виде целого числа, округление не требуется.

Ответ: 9.

Задание №2 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается в 3 балла.

Задание №3. В условиях невесомости пылинка, размерами которой можно пренебречь, имея удельный заряд q/m = 1 мкКл/кг, со скоростью 4 м/с параллельно обкладкам влетает в поле неподвижного плоского воздушного конденсатора, как показано на рис. 5. Обкладки имеют форму квадратных пластин со стороной 1 м. На обкладках равномерно распределён заряд 106 мкКл. Электростатическое поле в конденсаторе считать однородным и не выходящим за его пределы. Силами сопротивления пренебречь. Найдите скорость пылинки после вылета из конденсатора. Ответ представьте в единицах СИ, округлив до целого числа.

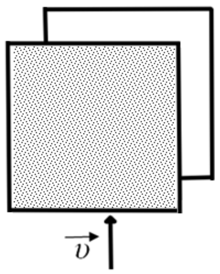

Рис. 5. Рисунок к заданию №3

В предлагаемом задании демонстрационного варианта рассматривается плоский конденсатор с квадратными пластинами. В поле конденсатора влетает положительный заряд с известным удельным зарядом. Известными в задаче считаются площади пластин (так как известно ребро квадратной пластины), скорость заряда и заряд конденсатора (на одной пластине $+106 \cdot 10^{-6}$ Кл/кг, на другой -Q, т.е. $-106 \cdot 10^{-6}$ Кл/кг).

При решении задачи необходимо вспомнить

– два рода заряда и характер их взаимодействия;

– особенность электростатического поля в плоском конденсаторе (оно однородно, т.е. напряженность во всех точках одинакова);

– формулы определения ёмкости конденсатора; связи разности потенциалов с напряжённостью поля и расстоянием между обкладками плоского конденсатора; силы, действующей на заряд в электростатическом поле.

Из последней формулы, применяя основное уравнение динамики поступательного движения, можно выразить ускорение заряда, приобретаемое в поле конденсатора.

Для выполнения анализа условия задачи целесообразно использовать вспомогательные схемы и чертежи.

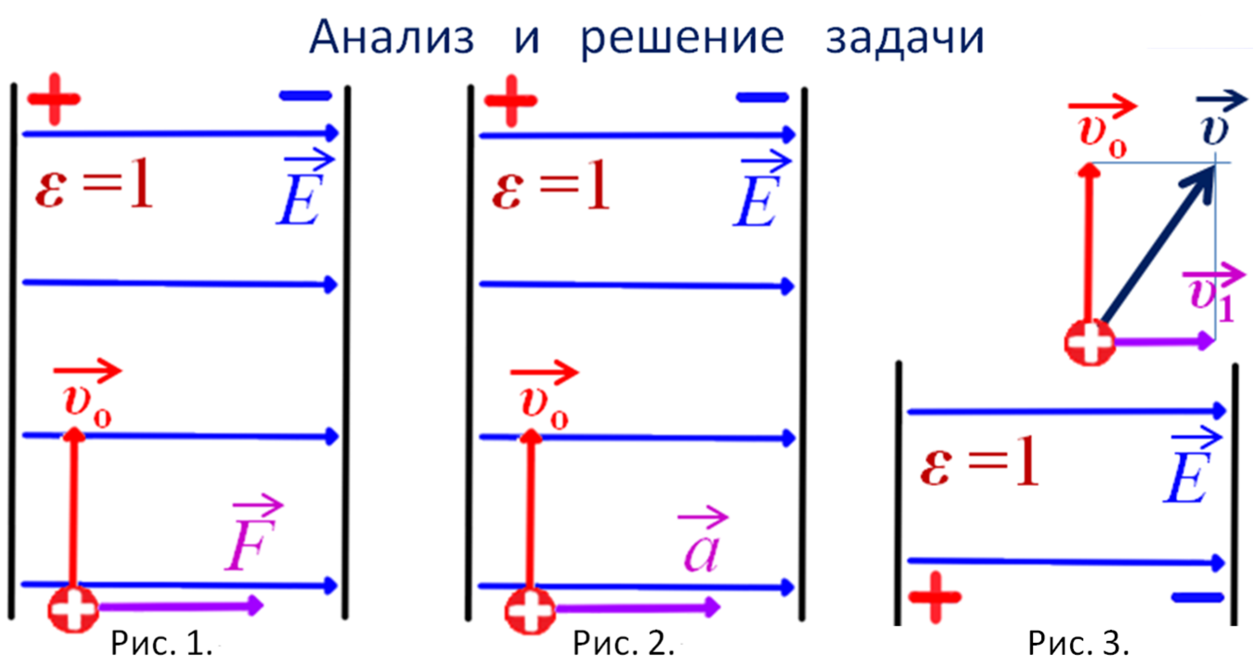

Рис. 6. Анализ и решение задачи

Анализируя условие задачи, необходимо отметить, что сила электрического взаимодействия ортогональна начальной скорости пылинки, следовательно, приобретаемое ускорение не будет изменять величину скорости вдоль обкладок. Движение вдоль обкладок будет равномерным. Однако, из-за действия электрической силы пылинка будет испытывать ускорение, направленное вдоль силовых линий электрического поля. В результате этого, пылинка, пройдя сквозь всё поле конденсатора, приобретёт скорость $\vec{\upsilon}_1$, направленную перпендикулярно начальной скорости и плоскости обкладок. Это движение будет равноускоренным.

Конечная величина приобретённой скорости $\vec{\upsilon}_1$ будет зависеть от ускорения и времени пребывания пылинки в поле конденсатора. Величина ускорения определяется произведением заряда конденсатора и удельного заряда пылинки, отнесённым к произведению диэлектрической постоянной и площади обкладок. Величина времени зависит от длины ребра обкладки и начальной скорости пылинки. Найдя скорость приобретённую пылинкой в электрическом взаимодействии, с помощью теоремы Пифагора можно вычислить результирующую скорость пылинки на выходе из конденсатора.

Модель решения представлена на рис. 7. Ускорение пылинки находим из закона Кулона, напряженность поля – из её связи с разностью потенциалов и расстоянием между обкладками плоского конденсатора, разность потенциалов – из определения ёмкости плоского конденсатора. Время определяем из уравнения поступательного движения пылинки вдоль обкладок с начальной скоростью (по аналогии с движением снаряда или камня по баллистической траектории в поле тяжести Земли). Такая аналогия вполне уместна, поскольку обе силы являются консервативными. При округлении до целого получается ответ 5 м/с.

Дано:	
$q/m = 1\cdot 10^{-6}$ Кл/кг $\upsilon_о = 4$ м/с $Q = 1{,}06\cdot 10^{-4}$ Кл $b = 1$ м $\varepsilon = 1$	$\vec{F} = q\cdot\vec{E};\ E = \frac{U}{d};\ U = \frac{Q}{C};\ C = \frac{\varepsilon_o \cancel{\varepsilon} S}{d} = \frac{\varepsilon_o b^2}{d};$ $F = q\frac{Q}{\cancel{d}}\cdot\frac{\cancel{d}}{\varepsilon_o b^2} = \frac{q\cdot Q}{\varepsilon_o b^2};\ \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m};\ a = \frac{q}{m}\frac{Q}{\varepsilon_o b^2};$
Найти: $\upsilon - ?$	$\upsilon_1 = at = \frac{q}{m}\frac{Q}{\varepsilon_o b\cdot\upsilon_o};\qquad t = \frac{b}{\upsilon_o}$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + \upsilon_1^2} = \sqrt{\upsilon_o^2 + \left(\frac{q}{m}\frac{Q}{\varepsilon_o b\cdot\upsilon_o}\right)^2} = \sqrt{16 + \left(\frac{10^{-6}\cdot 106\cdot 10^{-6}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 4}\right)^2}$$

$$\upsilon = \sqrt{24{,}966} = 4{,}9966 \approx 5\frac{м}{с}.$$

Ответ: 5 м/с

Рис. 7. Модель решения

Помимо законов и понятий, использованных при решении демоверсии задания №3, могут потребоваться законы сохранения электрического заряда, механического импульса и механической энергии. Особое внимание следует обратить на связь дальности продвижения пылинки в конденсаторе с местом входа в него. В частности, если воспользоваться рассмотренной задачей демоверсии, то можно определить минимальное расстояние между обкладками конденсатора, при котором пылинка сможет вылететь из него при удачном стечении обстоятельств. Под удачным стечением обстоятельств в данном случае понимается, что при входе в поле конденсатора она вплотную близко должна оказаться к положительно заряженной обкладке.

Задание №3 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается в 9 баллов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по решению заданий №№6 и 7 по предмету «Математика»
в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»,
номинация «Инженерный класс»,
Инженерно-техническое направление, Авиастроительные классы, Космические классы

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационного варианта по предмету «Математика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Рассмотрим решение задания №6 демонстрационного варианта.

Программисты Боря Битов и Клава Мышкина сформировали по массиву из 5 целых чисел каждый. Эти два массива необходимо слить в один так, чтобы элементы массива Клавы сохранили свой порядок (если элемент А стоял у Клавы раньше элемента В, то в объединённом массиве А также должен стоять раньше В; порядок элементов массива Бори может нарушиться). Каково количество различных вариантов расположения элементов в итоговом массиве, если все двадцать чисел различны? В ответе укажите только число.

Обозначим массивы Клавы и Бори как массив К и массив Б соответственно. Любой массив, полученный после их объединения, можно рассматривать как результат следующего процесса слияния.

Зафиксируем элементы массива К. Между ними есть 4 промежутка, в которые должны попасть элементы массива Б. Также элементы массива Б могут расположиться перед всеми или после всех элементов из К. Итого имеем 6 позиций, на которые может попасть первый (произвольно выбранный) элемент массива Б. На рисунке ниже изображены все пять элементов массива К и пустые места, на которые может встать первый выбранный из массива Б элемент.

	K_1		K_2		K_3		K_4		K_5	

После его установки получаем 7 позиций, на которые может попасть произвольный из оставшихся элементов массива Б. На рисунке ниже изображен один из возможных результатов первого шага: все пять элементов массива К, один установленный в произвольном месте элемент Б и пустые места, на которые может встать второй выбранный из массива Б элемент.

	K_1		$Б_2$		K_2		K_3		K_4		K_5	

После второго шага аналогичным образом получим 8 мест для установки третьего элемента из массива Б и так далее.

Итого количество вариантов составит

$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240.$$

Ответ: 30240.

Задание №6 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается 4 баллами.

Данная задача является достаточно стандартной задачей по комбинаторике, однако её решение не сводится к применению «в лоб» одной из стандартных формул.

В процессе решения необходимо обратить внимание на следующие моменты, которые являются источниками типичных ошибок.

1. Необходимо чётко осознавать основные понятия комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания, их отличие друг от друга и связи между ними.

2. Необходимо уметь различать ситуации, в которых важен порядок расположения элементов в выборке, от ситуаций, где этот порядок не важен.

3. При использовании готовых формул рекомендуется проводить проверки на аналогичных задачах с меньшими числами. Например, в рассмотренном примере можно взять массивы, состоящие из двух элементов (каждый), и расписать/нарисовать все возможные варианты результатов слияния.

4. В дополнение к стандартным формулам комбинаторики рекомендуется повторить и уметь осознанно применять метод шаров и перегородок.

5. Для более глубокого понимания различных подходов и формул рекомендуется составить и решить задачи со слегка изменённым условием. Например, разрешить элементам массива К менять свой порядок или потребовать сохранения взаимного порядка не только для элементов массива К, но и для Б.

Перейдём к рассмотрению задания №7 демонстрационного варианта.

Для получения 10 г эликсира доброты нужно смешать по 1 мл зелий А, Б и Ц. При этом масса зелья Ц в готовом эликсире в четыре раза превышает массу зелья Б. Также известно, что 10 г зелья Ц занимает объём, на 0,5 мл больший, чем такая же масса зелья А. Найдите зелье с наибольшей плотностью и укажите эту плотность (в г/мл) в ответе.

Обозначим через a, b, c плотности зелий А, Б и Ц соответственно (выраженные в г/мл). Тогда первое условие задачи даст соотношение

$$a + b + c = 10.$$

Второе условие означает, что

$$c = 4b,$$

поскольку объемы зелий Ц и Б в готовом эликсире равны, а их массы там же отличаются в 4 раза.

Наконец, третье условие приводит к уравнению

$$\frac{10}{c} - \frac{10}{a} = 0{,}5,$$

которое для удобства умножим на 2.

В итоге получаем систему из трёх уравнений для нахождения трёх неизвестных

$$\begin{cases} a + b + c = 10, \\ \dfrac{20}{c} - \dfrac{20}{a} = 1, \\ c = 4b. \end{cases}$$

Из уравнений видно, что b – не самая большая величина. Поэтому, исключая b, приходим к системе с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a + \dfrac{5c}{4} = 10, \\ \dfrac{20}{c} - \dfrac{20}{a} = 1. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения a:

$$a = \frac{40 - 5c}{4}$$

и подставим во второе. Перенеся все слагаемые влево, получим

$$\frac{20}{c} - \frac{80}{40 - 5c} - 1 = 0.$$

Приведём дроби к общему знаменателю и запишем равенство нулю числителя полученной единой дроби

$$20(40 - 5c) - 80\text{c} - \text{c}(40 - 5\text{c}) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим квадратное уравнение

$$\text{c}^2 - 44\text{u} + 160 = 0,$$

которое имеет два корня $\text{c}_1 = 4$ и $\text{c}_2 = 40$. Второй корень следует отбросить, поскольку в таком случае 10 г эликсира будет содержать 40 г зелья Ц, что невозможно.

Значению $c = 4$ (первому корню) соответствует значение $a = 5$.

Таким образом, наибольшую плотность имеет зелье А, эта плотность равна 5 г/мл.

Ответ: 5.

Задание №7 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается в 8 баллов.

Данная задача является достаточно стандартной текстовой задачей на смеси и сплавы. Для её решения достаточно знать единственную формулу _<объем> = <масса>* <плотность>_ и применять её к описанным в условии комбинациям компонентов эликсира. Предварительно можно составить таблицу, содержащую информацию об объёме, массе и плотности для трёх указанных комбинаций. Однако составление подобной таблицы не является обязательным элементом решения и не всегда упрощает анализ данных.

В процессе решения необходимо обратить внимание на следующие моменты, которые являются источниками типичных ошибок.

1. Анализ единиц измерения. Необходимо следить за тем, чтобы все данные были приведены к единой системе мер, которая не обязательно должна совпадать с СИ. Например, в данной задаче явно указана единица измерения плотности [г/мл], которая однозначно определяет единицы массы и объёма.

2. Выбор порядка действий при решении системы. Поскольку вопрос ставится только об одной из неизвестных величин, то их редукцию можно начать с той, которая заведомо не подходит под вопрос задачи.

3. Анализ диапазона возможных значений введённых неизвестных. Во-первых, все величины, используемые при решении задачи, не могут принимать отрицательных значений (что определяется их физическим смыслом). Во-вторых, условие неявно содержит ограничение сверху на возможные принимаемые значения. Положительные, но слишком большие значения одних величин могут приводить к отрицательным значениям других. Именно такими рассуждениями было отброшено одно из двух найденных значений плотности зелья Ц.

4. Проверка полученного ответа. Описанный ход решения задачи позволяет осуществлять многоэтапный самоконтроль. Полученные значения

неизвестных можно подставить сначала в квадратное уравнение (проверить верность его решения), затем – в составленную по условию систему уравнений (проверить тем самым верность преобразований уравнений). Но самое важное – подставить найденные значения непосредственно в условия задачи, что позволит проверить верность построения математической модели (системы уравнений) задачи. Несмотря на то, что находить все неизвестные не требуется, для полной проверки рекомендуется найти их все (при наличии времени).

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по решению задания №10 по предмету «Информатика»

в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»,

номинация «Инженерный класс»,

Инженерно-техническое направление, Авиастроительные классы, Космические классы

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения задания демонстрационного варианта по предмету «Информатика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Для решения задания №10 требуется знать основы алгебры логики, операции конъюнкции, дизъюнкции, инверсии(отрицания), импликации, эквиваленции, исключающего «или». Уметь восстанавливать логическое выражение по его таблице истинности и выполнять обратные преобразования, решать логические уравнения и проверять логические формулы на тождественность.

Рассмотрим основные логические операции.

1. *Отрицание* (инверсия) – логическая операция, которая делает ложное истинным, а истинное ложным.

Обозначения: НЕ, not, ¬A, $\overline{A}$. В заданиях используется последний вариант записи.

2. *Конъюнкция* (логическое умножение) – бинарная логическая операция, которая принимает значение истины тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Обозначения: И, and, &, ×, ∧. В заданиях используется последний вариант записи.

3. *Дизъюнкция* (логическое сложение) – бинарная логическая операция, которая принимает значение ложь только в случае, если оба высказывания ложны.

Обозначения: ИЛИ, or, +, ∨. В заданиях используется последний вариант записи.

4. *Импликация* (логическое следование) – бинарная логическая операция, в которой левое высказывание является посылкой (условием), а правое – следствием условия. Импликация принимает ложное значение, когда первое высказывание истинно, а второе ложно. В остальных случаях она принимает значение истины.

Обозначение: →.

5. *Эквивалентность* (логическая равнозначность, эквиваленция) – это бинарная логическая операция, которая принимает значение истины тогда и только тогда, когда оба выражения имеют одинаковую истинность. Обозначения: ↔, ≡ .

Ниже приведены таблицы истинности для перечисленных логических операций.

Конъюнкция		
A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция		
A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Отрицание	
A	$\overline{A}$
0	1
0	0

Импликация		
A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность		
A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Приоритет выполнения логических операций:

1. Действия в скобках.
2. Операции отрицания.
3. Конъюнкции.
4. Дизъюнкции.
5. Импликации.
6. Эквивалентность.

Иногда логическое выражение бывает очень громоздким. В таком случае можно выполнить упрощение выражения с помощью эквивалентных преобразований. Ниже приведены таблицы истинности, которые доказывают тождество преобразований для импликации и эквивалентности.

Импликация

$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

A	B	$\overline{A}$	$A \to B$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Эквивалентность

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$$

A	B	$A \to B$	$(B \to A)$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Ниже в таблице приведены законы алгебры логики. Истинность этих законов легко установить, построив таблицу истинности для левого и правого логических выражений.

Основные законы

Закон	**Дизъюнкция**	**Конъюнкция**
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \vee \overline{A} = 1$	$A \wedge \overline{A} = 0$
исключения констант	$A \vee 1 = 1$ $A \vee 0 = A$	$A \wedge 1 = A$ $A \wedge 0 = 0$
повторения	$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$
дистрибутивности (поглощения)	$A \vee (A \wedge B) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$
коммутативности (переместительный)	$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$
ассоциативности (сочетательный)	$A \vee (B \vee C)$ $= (A \vee B) \vee C$	$A \wedge (B \wedge C)$ $= (A \wedge B) \wedge C$
распределительный	$A \vee (B \wedge C)$ $= (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C)$ $= (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
де Моргана	$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

Проведём анализ решения задания демонстрационного варианта.

Установите тождественность логической функции F(x,y,z), заданной таблицей истинности, с логической функцией G(x,y,z), описанной аналитически. Если функции тождественны, то выпишите в поле ответа последовательность нулей и единиц, соответствующую столбцу таблицы истинности для дизъюнкции F(x,y,z) и G(x,y,z), в противном случае – выпишите в поле ответа столбец, соответствующий конъюнкции F(x,y,z) и G(x,y,z).

x	**y**	**z**	**F(x,y,z)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$G(x,y,z) = \overline{\big((y \vee \overline{z}) \rightarrow (x \rightarrow \overline{y})\big)} \vee \overline{x} \wedge z$$

Данную задачу можно решать двумя способами: через упрощение логической функции $G(x,y,z)$ и построение таблицы истинности для упрощённого варианта или же через построение таблицы истинности для исходной логической функции $G(x,y,z)$.

Рассмотрим первый вариант решения. Упростим логическую функцию $G(x,y,z)$. Преобразования выражения даны в левой колонке, применяемые законы описаны в правой колонке таблицы, расположенной ниже.

Логическое выражение	**Применяемое правило**
$\overline{(y \vee \overline{z}) \to (x \to \overline{y})} \vee (\overline{x} \wedge z)$	
Рассмотрим левую часть:	
$\overline{(y \vee \overline{z}) \to (x \to \overline{y})}$	$A \to B = \overline{A} \vee B$
$\overline{\overline{(y \vee \overline{z})} \vee (x \to \overline{y})}$	$A \to B = \overline{A} \vee B$
$\overline{\overline{(y \vee \overline{z})} \vee (\overline{x} \vee \overline{y})}$	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
$\overline{\overline{(y \vee \overline{z})}} \wedge \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})}$	$\overline{\overline{A}} = A$
$(y \vee \overline{z}) \wedge \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})}$	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
$(y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}})$	$\overline{\overline{A}} = A$
$(y \vee \overline{z}) \wedge (x \wedge y)$	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$(x \wedge y \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z})$	$A \wedge A = A$
$(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z})$	$A \vee (A \wedge B) = A \wedge (1 \vee B)$ $A \wedge 1 = A$ (Можно было сразу применить закон поглощения, но так подробнее)
$(x \wedge y) \wedge (1 \vee \overline{z})$	$A \vee 1 = 1$
$(x \wedge y) \wedge 1$	$A \wedge 1 = A$
$(x \wedge y)$	
Возвращаемся ко второй части:	
$(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge z)$	Нечего преобразовывать

Теперь для преобразованной функции построим таблицу истинности:

x	y	z	$\overline{x}$	$(x \wedge y)$	$(\overline{x} \wedge z)$	$G(x, y, z)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1

x	y	z	$\overline{x}$	$(x \wedge y)$	$(\overline{x} \wedge z)$	$G(x,y,z)$
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

Значения функции *G*(*x*,*y*,*z*) совпадают со значениями функции *F*(*x*,*y*,*z*), значит, функции тождественны, а их дизъюнкция будет равна тем же значениям.

Ответ: 01010011.

Второй способ решения – построение таблицы истинности для функции *G*(*x*,*y*,*z*) без предварительных преобразований.

Пронумеруем логические операции:

$$G(x,y,z) = \overset{8}{\overline{((y \overset{5}{\vee} \overset{3}{\overline{z}}) \overset{7}{\rightarrow} (x \overset{6}{\rightarrow} \overset{2}{\overline{y}}))}} \overset{9}{\vee} \overset{1}{\overline{x}} \overset{4}{\wedge} z$$

В таблице ниже число в заголовках столбцов соответствует номеру выполняемой операции. Последовательно выполнив каждую операцию, получаем итоговый столбец с такими же значениями, как и в предыдущем способе решения (см. ниже).

x	y	z	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0

x	y	z	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1

Ответ: 01010011.

Задание №10 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается в 8 баллов.

Рассмотрим самые распространённые ошибки при выполнении данного задания.

1. Порядок выполнения операций. Необходимо обязательно предварительно расставить операции по приоритету выполнения, после чего приступать к решению.

2. Своевременное применение операции отрицания (инверсии). Если упустить какую-либо из внимания – результат получится другой.

3. Грамотное применение законов логики. Если участник не уверен в преобразовании, лучше расписать всю таблицу истинности для логической функции.