Е.В. Родина

Методические рекомендации к выполнению конкурсных заданий по математике для междисциплинарного экзамена в номинации «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»

МОСКВА 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....……….. 3

1. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ

1.1. Основные понятия.. 4

1.2. Теорема об ортогональной проекции...5

2. РАЗБОР ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА

2.1. Решение задачи 8

2.2. Типовые ошибки в решении задачи 11

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

3.1. Основные понятия.. 11

3.2. Формула геометрической вероятности 12

4. РАЗБОР ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА

4.1. Решение задачи 16

4.2. Типовые ошибки в решении задачи 19

Заключение……………………………………………………………...20

Введение

Данные методические рекомендации предназначены для выполнения конкурсных заданий по математике для теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по единому направлению.

Рассматривается необходимый теоретический минимум для решения конкурсных задач по математике. Указания сопровождаются решением примеров.

В методических рекомендациях приведен разбор решения демонстрационного варианта соответствующего задания по математике.

Предполагается ознакомление обучающегося с доказательством теоремы о площади ортогональной проекции плоской фигуры, с понятием геометрической вероятности и с познавательной точки зрения рассматривается парадокс Бертрана.

Теорема о площади ортогональной проекции плоской фигуры.

Проекцией точки М на плоскость α называется основание перпендикуляра M', проведённого из этой точки к данной плоскости, если точка М не лежит в плоскости *α*, и сама точка N, если она лежит в плоскости *α* (рис. 1).

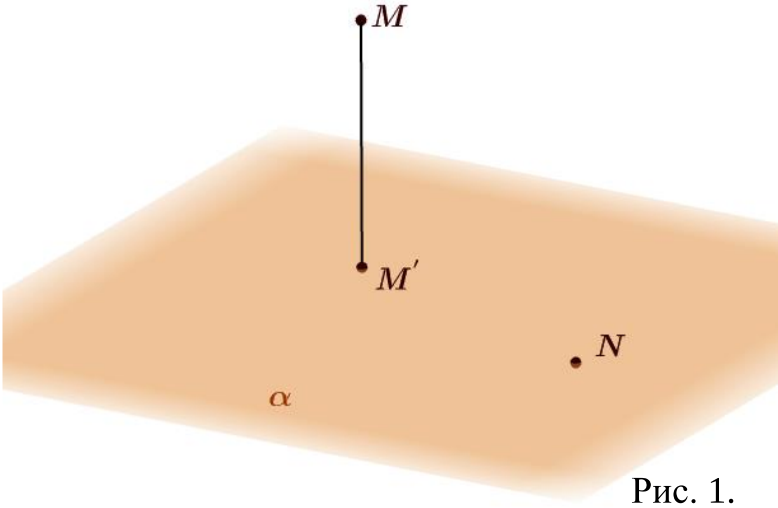

Рис. 1.

Обозначим буквой Ф какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость α, то получим фигуру Ф', которая называется ***проекцией фигуры Ф*** на данную плоскость α (рис. 2).

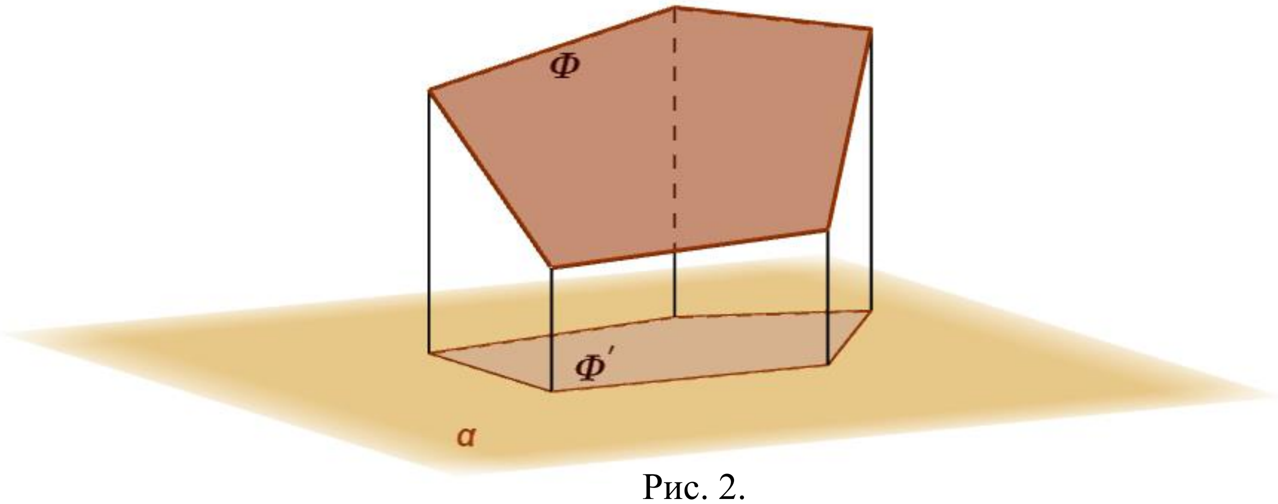

Рис. 2.

На рисунке 1 многоугольник Ф' — проекция многоугольника Ф на плоскость α.

Параллельное проектирование (рис. 3 (а)), при котором проектирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций α, называется ***ортогональным*** **(*прямоугольным*)** (рис. 3 (б)).

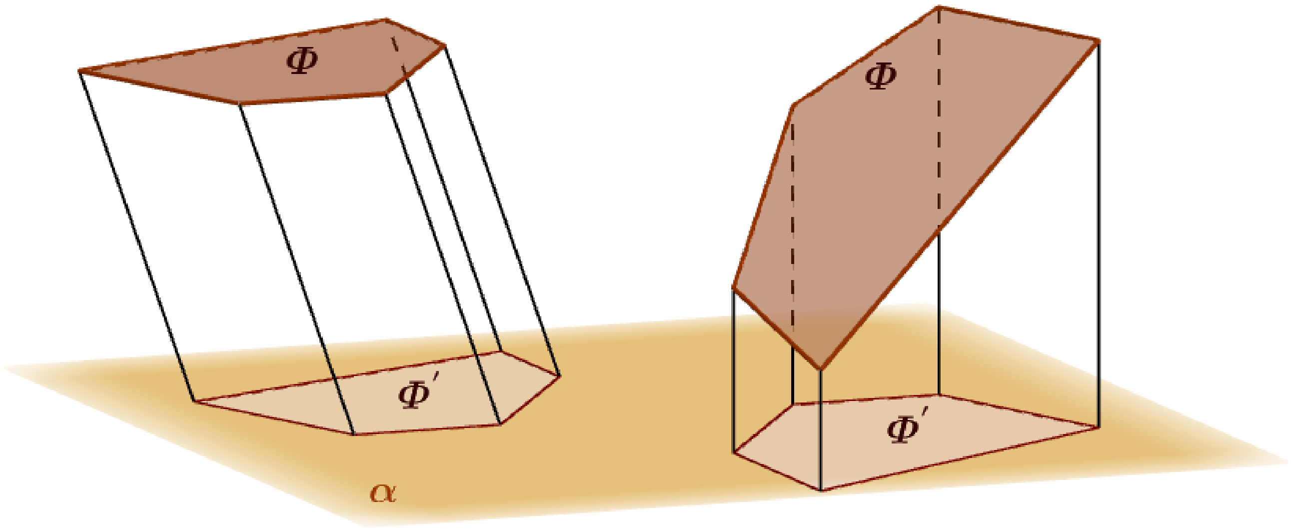

Рис. 3 (а). Рис. 3 (б).

Ортогональной (прямоугольной) проекцией фигуры Ф на плоскость α называют множество точек, которые получаются при пересечении плоскости α с перпендикулярными к ней прямыми, проходящими через все точки этой фигуры.

Теорема. Площадь $S_{пр}$ ортогональной проекции Ф' многоугольника Ф на плоскость α равна произведению его площади $S_{мн}$, умноженной на косинус угла φ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ между плоскостью многоугольника и плоскостью α

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{мн}} \cdot cos(\varphi).$$

Доказательство.

а) Докажем сначала частный случай. Пусть данный многоугольник Ф является треугольником ABC, одна из сторон которого, например, AB лежит в плоскости α (рис. 4).

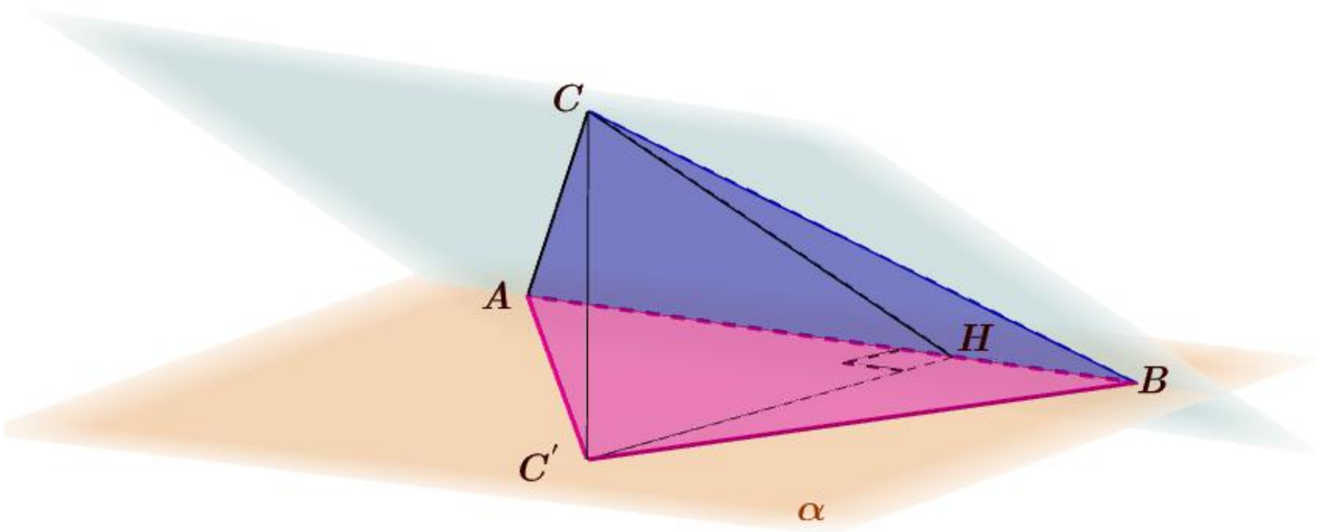

Рис. 4.

Проведём из точки C перпендикуляр CC' к плоскости α. Тогда треугольник ABC' — проекция треугольника ABC на эту плоскость. Пусть отрезок C'H — высота треугольника ABC'. По теореме о трёх перпендикулярах получим

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{C'C} — \text{перпендикуляр} \\ \mathrm{C'H} — \text{проекциянаклонной} \\ \mathrm{C'H} \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \text{наклонная CH} \perp \text{AB}.$$

Тогда $\angle\mathrm{CHC'}$ — линейный угол двугранного угла $A\mathrm{CHC'}$, и следовательно $\angle A\mathrm{CHC'} = \varphi$.

Из прямоугольного треугольника $\mathrm{CHC'}$ найдём

$$cos(\varphi) = \frac{\mathrm{C'}H}{CH} \Rightarrow \mathrm{C'}H = CH \cdot cos(\varphi).$$

Итак,

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH \\ S_{AB\mathrm{C'}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \mathrm{C'}H \\ CH = \mathrm{C'}H \cdot cos(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow S_{AB\mathrm{C'}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \mathrm{C'}H \cdot cos(\varphi) = S_{ABC} \cdot cos(\varphi),$$

то есть $S_{AB\mathrm{C'}} = S_{ABC} \cdot cos(\varphi)$.

б) Рассмотрим случай, когда сторона AB параллельна плоскости α (рис. 5).

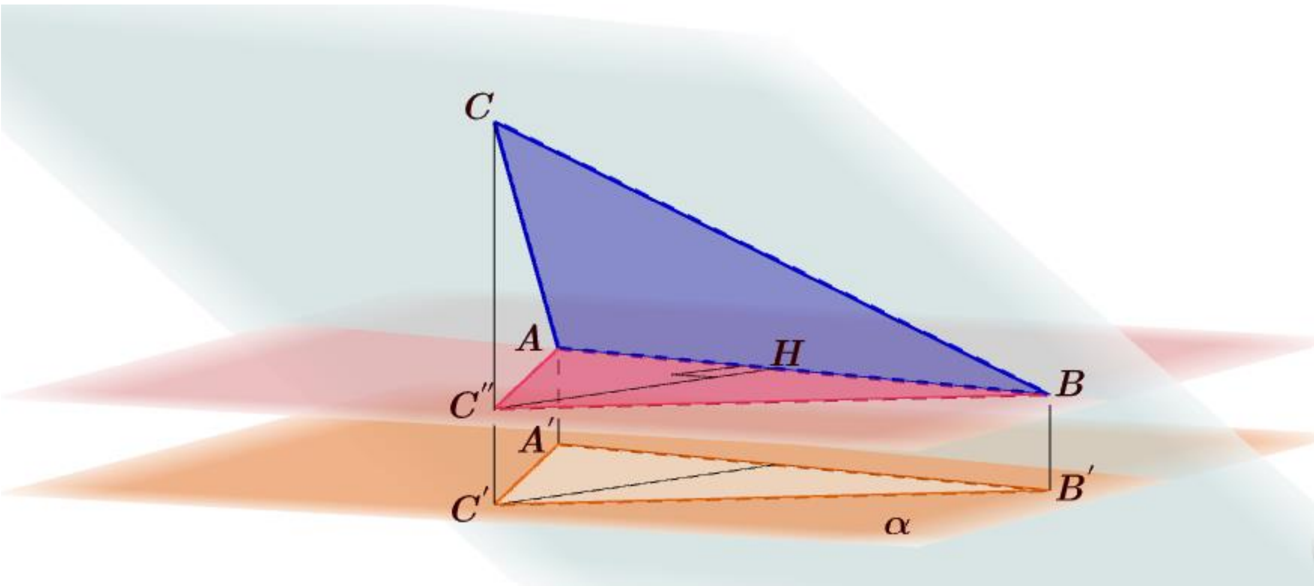

Рис. 5.

Построим ортогональную проекцию A'B'C' треугольника ABC на плоскость α. Из параллельности плоскостей (ABC'') и α последует равенство треугольников A'B'C' и ABC", а следовательно и равенство их площадей. Тогда, с учетом пункта а), получим справедливость равенства:

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC''} = S_{ABC} \cdot cos(\varphi).$$

в) Пусть не одна из сторон треугольника ABC не параллельна плоскости α. Проведём через его вершины прямые, параллельные ℓ — прямой пересечения плоскостей (ABC) и α (рис. 6). Одна из этих прямых (на рисунке прямая AD) разобьёт ΔABC на два треугольника, у каждого из которых одна сторона будет параллельна α. Тогда для каждого из полученных треугольников (на рисунке ΔBCD и ΔBAD) применимая формула, доказанная в пункте б). Для нахождения площади проекции A'B'C' треугольника ABC необходимо сложить полученные равенства.

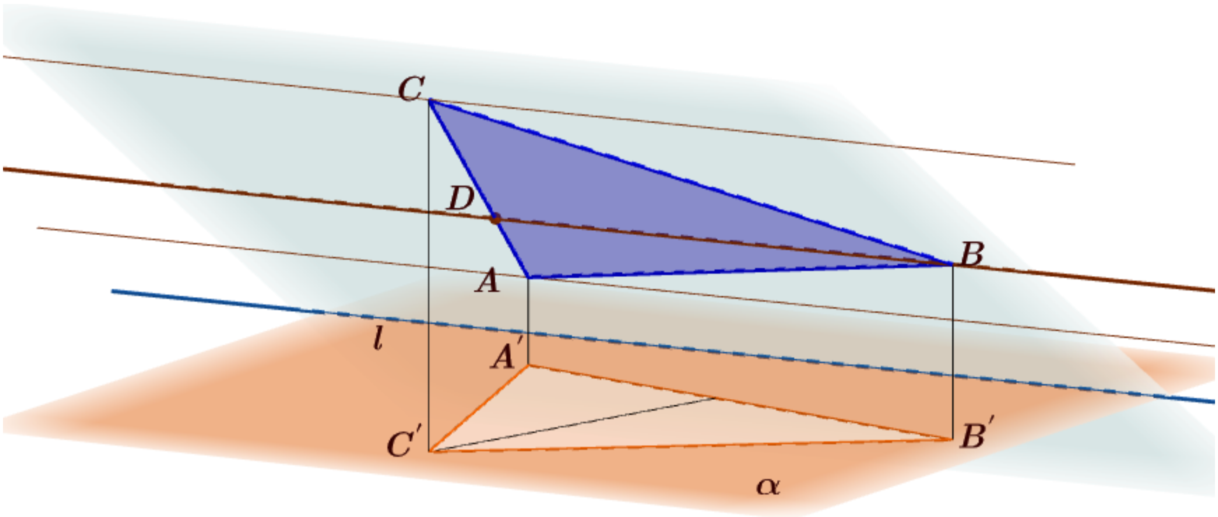

Рис. 6.

Г) Рассмотрим теперь общий случай — произвольный выпуклый многоугольник Ф с площадью $S_{мн}$. Возьмём одну из его вершин и проведём все выходящие из неё диагонали многоугольника (рис. 7).

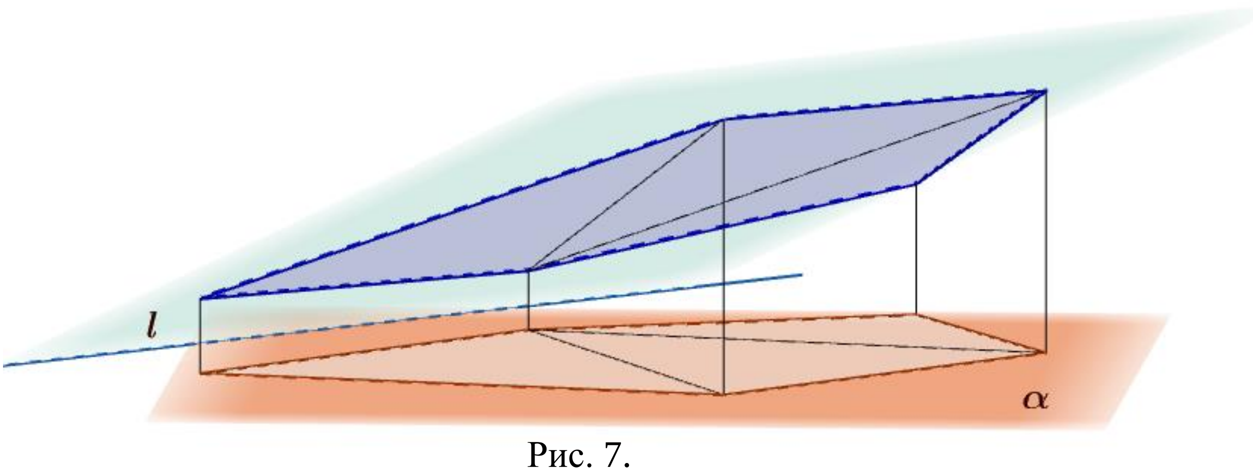

Рис. 7.

Они разобьют данный многоугольник Ф на треугольники. Применяя формулу к каждому из этих треугольников и складывая полученные равенства, получим, что формула верна и для любого выпуклого многоугольника.

■

Разбор демонстрационного варианта

На практике теорема о площади ортогональной проекции многоугольника применима при нахождении площадей сечений, при вычислении угла между плоскостями, при вычислении площади боковой поверхности пирамиды.

Пример 1. Дачник решил сделать навес в форме треугольника ABC со сторонами 7, 13 и 15 так, чтобы плоскость навеса составляла с плоскостью земли угол, равный углу ACB. Вычислите площадь ортогональной проекции навеса на землю. Ответ округлите до целых.

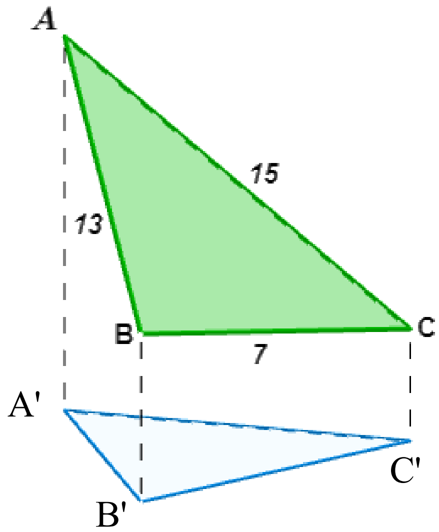

Рис.

Решение. Обозначим A'B'C' — ортогональную (прямоугольную) проекцию треугольника ABC (навеса) на плоскость земли (рис. 8).

По доказанной теореме выше имеем

где φ — угол между плоскостью навеса и плоскостью земли, или, что одно и то же угол между плоскостями (ABC) и (A'B'C').

По условию задачи $\angle ACB = \varphi$. Применим теорему косинусов к треугольнику ABC:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot cos(\varphi).$$

Найдем значение косинуса $\angle ACB$:

$$cos(\varphi) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot AB} = \frac{15^2 + 7^2 - 13^2}{2 \cdot 15 \cdot 7} = \frac{1}{2}.$$

Для нахождения площади треугольника ABC воспользуемся формулой

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DC \cdot sin(\angle ACB).$$

С учётом того, что $cos(\varphi) = \frac{1}{2}$, найдем $sin(\angle ACB)$:

$$sin(\angle ACB) = \sqrt{1 - cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

или

$$cos(\varphi) = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{105\sqrt{3}}{4}.$$

Итак, окончательно получим, что площадь ортогональной проекции навеса на землю равна

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot cos(\varphi) = \frac{105\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \approx 22{,}73 \approx 23.$$

Ответ. 23.

Пример 2. В правильной шестиугольной пирамиде площадь сечения, параллельного боковой грани, равна 8, а его ортогональной проекции на плоскость основания — 4. Вычислите площадь боковой грани пирамиды, если сторона основания равна 6.

Решение. Для решения задачи сделаем схематично чертеж (рис. 9(а)).
Согласно теореме о площади ортогональной проекции плоской фигуры запишем

$$S_{\text{проекции}} = S_{\text{сечения}} \cdot cos(\varphi),$$

где φ — угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды (рис. 9 (б)).

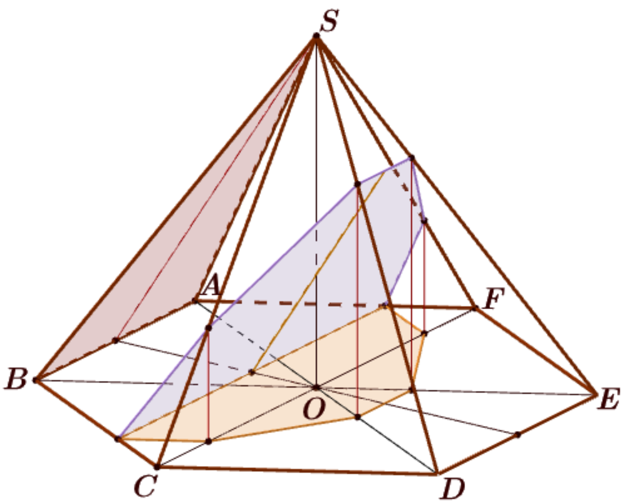

Рис. 9 (а).

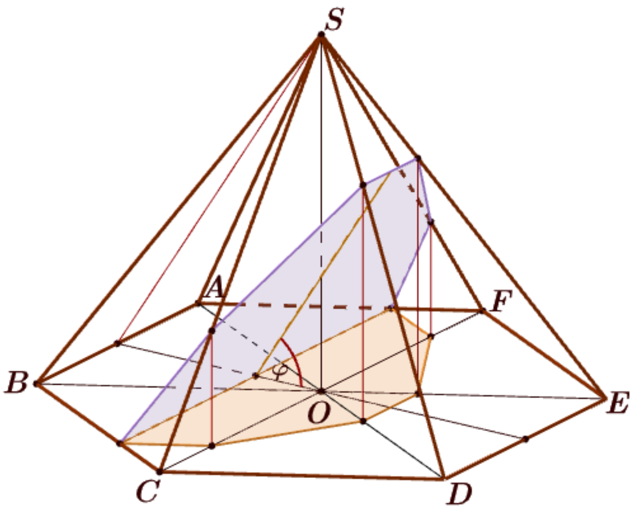

Рис. 9 (б).

По условию задачи

$$S_{\text{сечения}} = 8, \quad S_{\text{проекции}} = 4,$$

тогда

$$4 = 8 \cdot cos(\varphi) \Rightarrow cos(\varphi) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Из параллельности плоскости сечения и плоскости боковой грани и с учётом того, что угол между плоскостями сечения и основания равен φ, получим, что угол между плоскостью основания пирамиды и плоскостью боковой грани также равен φ (рис. 10).

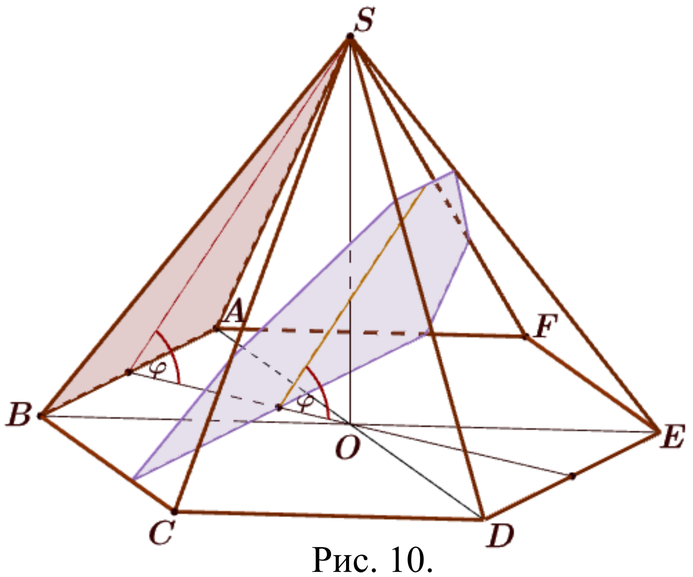

Рис. 10.

Заметим, что ортогональной проекцией боковой грани (SAB) будет правильный треугольник ABO (рис. 11), площадь которого равна

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot cos(60^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{2} = 9.$$

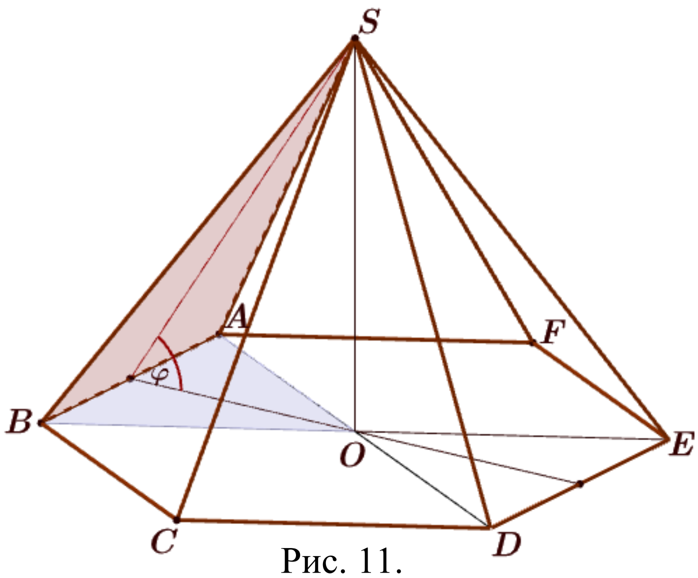

Рис. 11.

Применим вновь теорему о площади ортогональной проекции плоской фигуры

$$S_{ABO} = S_{SAB} \cdot cos(\varphi) = cos(\varphi) \Longrightarrow S_{SAB} = \frac{S_{ABO}}{cos(\varphi)} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18.$$

Ответ. 18.

Типовые ошибки, возникающие в процессе построения проекций.

1. Неправильное определение точек фигуры для проецирования приводит к искажению её формы в проекции.

2. Неправильное проведение перпендикуляров из точек фигуры на плоскость приводит к некорректному отображению фигуры на плоскости.

Геометрическая вероятность события.

Каждый раз, вычисляя вероятность появления какого-либо события *A* в некотором опыте, нам необходимо:

1) выделить Ω — множество элементарных исходов опыта (элементарных событий);
2) представить событие *A*, вероятность которого нужно найти, в виде суммы или произведения элементарных событий множества Ω;
3) сопоставить по определённому правилу событию *A* неотрицательное число *p* из отрезка [0; 1], которое называют вероятностью появления данного события.

Рассмотрим опыт: подбрасывание игрального кубика. А — событие «Выпало число кратное 3».

1) Множество элементарных исходов — появление цифр на верхней грани кубика от 1 до 6 (Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} — множество элементарных событий).

2) Событие *A* можно представить с помощью элементарных событий: выпало число 3 или 6 (А = {3, 6}).

3) Сопоставлять событию *A* число из отрезка [0; 1] можно по-разному.

Например, по формуле классической вероятности, если

1) множество Ω содержит конечное число элементарных событий:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

2) все элементарные события ω_i считаются равновозможными, то есть шанс появления одинаковый:

$$\omega_i \Rightarrow \frac{1}{n} \in [0; 1],$$

3) событие А состоит из конечного числа m элементарных событий,
то вероятность события $p(A)$ определяется по формуле

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Можно заметить, что формула классической вероятности работает не всегда. Например, мы не сможем указать количество элементарных исходов n множества Ω, если оно является отрезком, то есть содержит бесконечное множество событий.

Рассмотрим опыт: пассажир спустился в метро. Интервал движения поездов 3 минуты. Событие А — «время ожидания поезда от 1 до 2 минут». Тогда

1) множество элементарных событий $\Omega = [0; 3]$,

2) событие $A = [1; 2]$.

Однако классической формулой воспользоваться нельзя, так как количество n и m элементов множеств А и Ω посчитать невозможно. Следовательно, способ вычисления вероятности необходимо поменять. Рассмотрим А и Ω не как множества, состоящие из чисел, а как геометрические объекты, в нашем опыте как отрезки [0; 3] и [1; 2]. Тогда каждому отрезку можно сопоставить его длину

$$[0;3] \Rightarrow 3; [1;2] \Rightarrow 1.$$

Вновь можно воспользоваться классической формулой, только теперь это будет отношение длин отрезков:

$$p(A) = \frac{\text{длинаотрезкаA}}{\text{длинаотрезка}\Omega}.$$

В рассмотренном выше примере вероятность ожидания поезда от 1 до 2 минут будет равна (рис. 12)

$$p(A) = \frac{\text{длинаотрезка}[1;2]}{\text{длинаотрезка}[0;3]} = \frac{1}{3}.$$

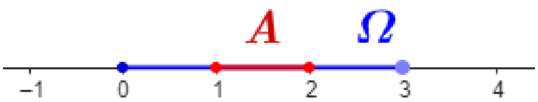

Рис. 12.

Вместо отрезков можно рассмотреть плоские фигуры, а именно, пусть фигура А расположена внутри фигуры Ω (рис. 13). В этом случае каждому множеству можно сопоставить площадь соответствующей фигуры

$$\mathrm{A} \Rightarrow S_A; \Omega \Rightarrow S_\Omega.$$

Тогда

$$p(A) = \frac{\text{площадьфигурыA}}{\text{площадьфигуры}\Omega} = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

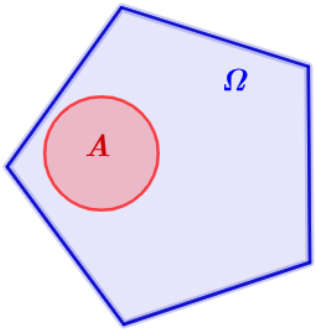

Рис. 13.

Аналогично можно рассмотреть пространственные фигуры А и **Ω** (рис. 14). Каждому множеству можно сопоставить объем соответствующей пространственной фигуры

$$\mathrm{A} \Longrightarrow V_A; \Omega \Longrightarrow V_\Omega.$$

Формула для вычисления вероятности события A примет вид

$$p(A) = \frac{\text{объёмфигурыA}}{\text{объёмфигуры}\Omega} = \frac{V_A}{V_\Omega}.$$

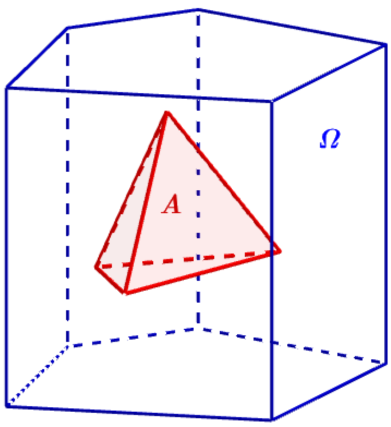

Рис. 14.

Итак, ***геометрической вероятностью*** некоторого события A называется отношение

$$p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где $m(\Omega)$ – геометрическая мера, выражающая общее число всех равновозможных исходов данного испытания, а $m(A)$ – мера, выражающая количество благоприятствующих событию А исходов.

В геометрической модели события считаются *равновероятными*, если они имеют одинаковую геометрическую меру. В качестве исходов выбирают меру некоторого множества Ω на прямой, на плоскости, в пространстве, на котором задана соответственно

- длина (например, дуги на окружности, отрезка кривой);
- площадь (многоугольника, окружности и т.д.);
- объем (многогранника, тела и т.д.).

Рассмотрим примеры.

Пример 3. Ученик случайным образом выбирает точку M на отрезке AB длины 12. Вычислите вероятность того, что точка M будет отстоять от точек A или B на расстоянии не больше $\frac{1}{4}$ длины AB.

Решение. $\frac{1}{4}AB = \frac{12}{4} = 3$. Сделаем чертёж (рис. 15).

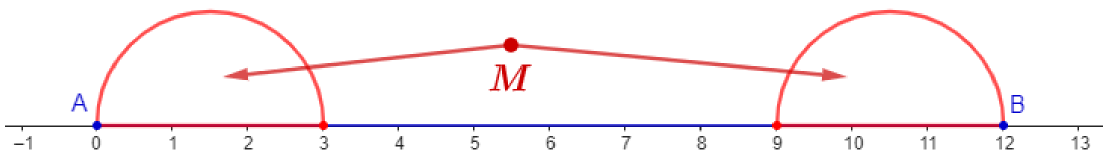

Рис. 15.

Множество элементарных событий Ω = [0; 12], событие A = [0; 3] ∪ [9; 12]. Воспользуемся формулой геометрической вероятности

$$p(A) = \frac{(3-0)+(12-9)}{12-0} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Пример 4. На столе, имеющем форму ромба с диагоналями 6 и 10, лежит квадратная салфетка со стороной 3. Ребенок случайно уронил косточку от яблока на стол. Найдите вероятность того, что она попала на салфетку.

Решение. Множество элементарных событий Ω = {ромб с диагоналями 6 и 10}, событие A = {квадрат со стороной 3} (рис. 16).

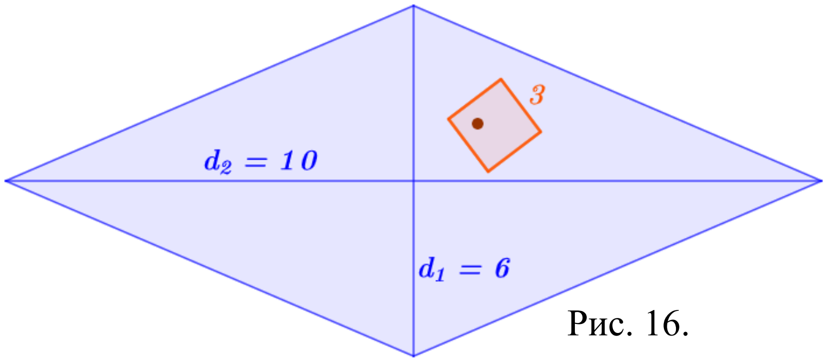

Рис. 16.

Найдем площади ромба и квадрата

$$S_{\text{ромб}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30, S_{\text{квадрат}} = a^2 = 3^2 = 9.$$

Воспользуемся формулой геометрической вероятности

$$p(A) = \frac{S_{\text{квадрат}}}{S_{\text{ромб}}} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Ответ. 0,3.

Пример 5. Студент бросил камешек в в мусорное ведро, которое имеет форму цилиндра с радиусом основания 2 и высотой 3. Найдите вероятность попадания камешка в ведро, если комната имеет форму параллелепипеда с размерами $2 \times 4 \times 3$. Ответ округлите до десятых.

Решение.

Множество элементарных событий Ω = {параллелепипед с размерами $2 \times 4 \times 3$}, событие А = {цилиндр с радиусом основания 2 и высотой 3} (рис. 17).

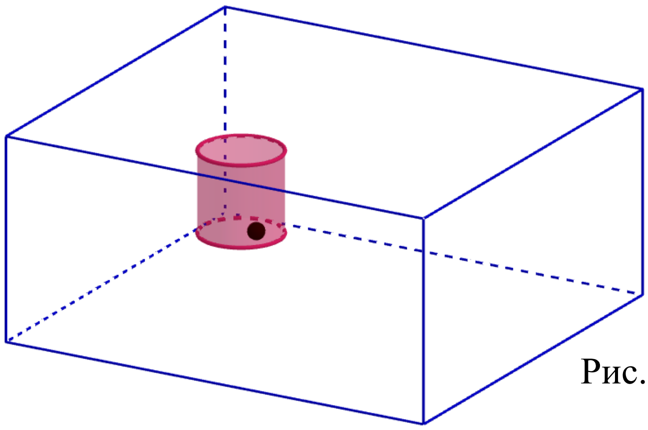
Рис. 17.

Найдем объемы цилиндра и параллелепипеда

$$V_{\text{цилиндр}} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi,$$

$$S_{\text{параллелепипед}} = a \times b \times c = 2 \times 4 \times 3 = 24.$$

Воспользуемся формулой геометрической вероятности

$$p(A) = \frac{V_{\text{цилиндр}}}{S_{\text{параллелепипед}}} = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52.$$

Ответ. 0,5.

В теории геометрических вероятностей, как уже говорилось выше, случайными элементами являются не числа, а геометрические объекты. Способ сопоставления неотрицательного числа (вероятности) не всегда очевиден. Например, нечёткость в определении самого множества элементов Ω приводит к ряду «парадоксов», которые в большенстве случаев основаны на недоразумении.

Joseph Louis François Bertrand
(1822-1900)

Рассмотрим парадокс Жозефа Луи Франсуа Бертрана (1907) — французский математик, работавший в области теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятности и термодинамики.

Разбор демонстрационного варианта

Задача — парадокс. Найдите вероятность того, что длина «случайной хорды» окружности единичного радиуса будет больше $\sqrt{3}$ (или стороны равностороннего вписанного треугольника).

При решении возможны следующие три задачи.

Задача 1. Всякая хорда AB пересекает окружность в двух точках. Обе точки на окружности выбираются случайно и равноправно, независимо друг от друга. Не теряя общности, можно допустить, что одна из этих точек, например A, есть вершина вписанного равностороннего треугольника (рис. 18).

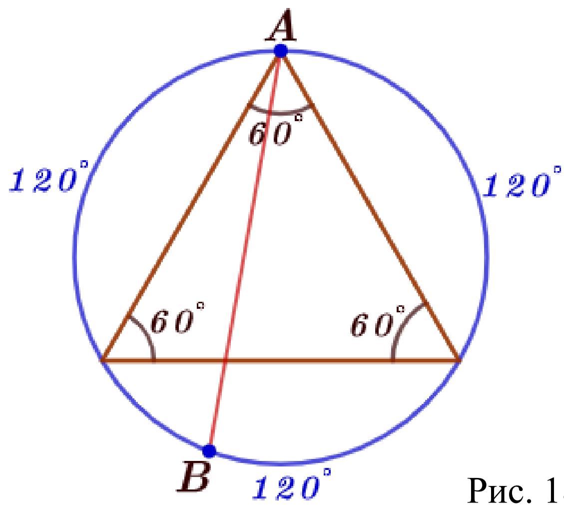

Рис. 18.

В таком случае для второй точки остаётся ровно $\frac{1}{3}$ часть окружности, где она должна находиться с тем, чтобы длина возникающей хорды была бы больше $\sqrt{3}$ (рис. 19).

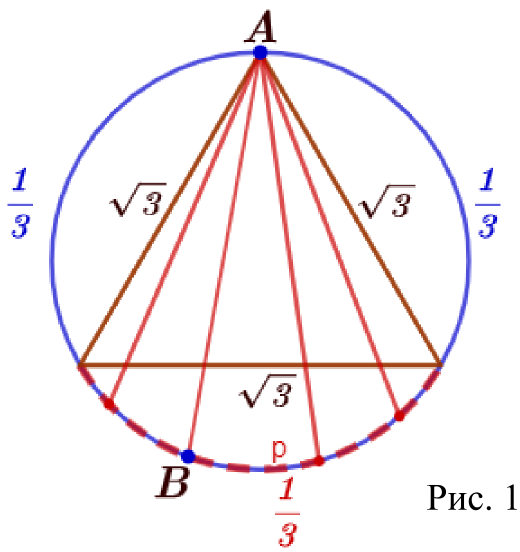

Рис. 19.

Множество элементарных событий Ω = {длина окружности},

событие A = {$\frac{1}{3}$ длины окружности}.

Таким образом, искомая вероятность равна

$$p(A) = \frac{\text{длинадугиокружности}}{\text{длинаокружности}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 2. Длина хорды зависит от её расстояния до центра окружности и не зависит от её положения (рис. 20).

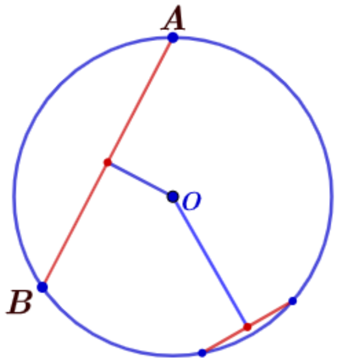

Рис. 20.

Поэтому можно предположить, что хорда имеет фиксированное положение - перпендикулярно заданному диаметру, а выбор точки пересечения хорды с диаметром равновозможен (рис. 21 (а)).

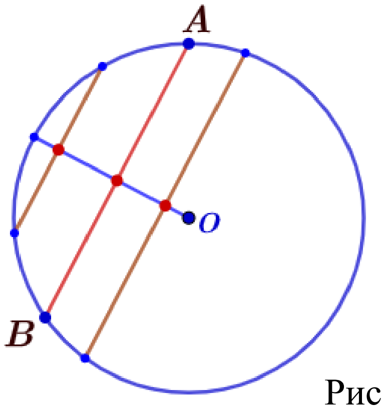

Рис. 21 (а) .

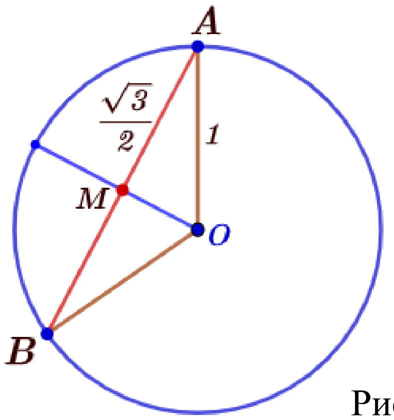

Рис. 21 (б) .

Вычислим расстояние от центра O окружности до точки M пересечения с хордой (рис. 21 (б)).

$$\Delta OMA - \text{прямоугольный} \Longrightarrow OM = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Для того, чтобы хорда имела длину, большую $\sqrt{3}$, расстояние OM должно быть меньше $\frac{1}{2}$ (рис. 23).

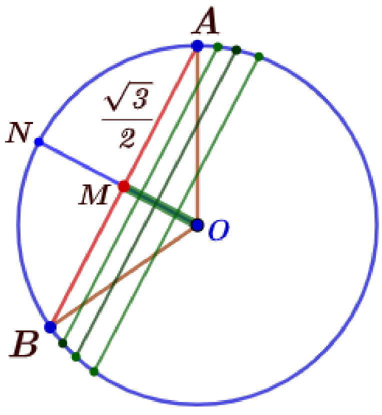

Рис. 23.

Множество элементарных событий Ω = {длина радиуса ON = 1}, событие A = {$\frac{1}{2}$ длины радиуса ON}.

Таким образом, искомая вероятность равна

$$p(A) = \frac{\frac{1}{2}\text{длинырадиуса}}{\text{длинарадиуса}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 3. Каждая хорда AB однозначно определяется основанием перпендикуляря H, опущенного на нее из центра O окружности. Если выбор точки H равнозначен, то все такие точки лежат в круге с центром в точке O и радиусом равным $\frac{1}{2}$ (рис. 24).

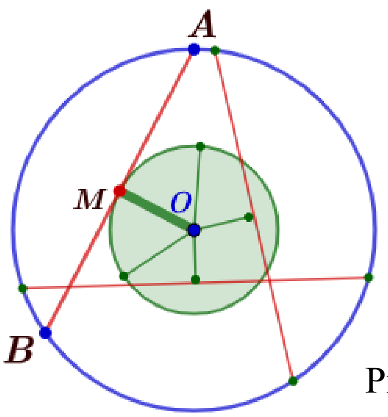

Рис. 24.

Множество элементарных событий Ω = {площадь круга радиуса 1}, событие A = {площадь круга радиуса $\frac{1}{2}$ }. Таким образом, искомая вероятность равна

$$p(A) = \frac{\text{площадькругарадиуса}\frac{1}{2}}{\text{площадькругарадиуса}1} = \frac{\pi\frac{1}{4}}{\pi} = \frac{1}{4}.$$

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Заметим, что все три решения верны, а различие ответов можно объяснить тем, что слово «случайно» в исходной задаче чётко не определено. Отсюда и возникает три варианта решения. В этом и заключается парадокс Бертрана.

Типовые ошибки в решении задач.

1) Неправильное определение событий. Для решения задач на вероятность необходимо правильно определить все возможные события.

2) Неправильное использование формул вероятности. Существует множество формул, но некоторые из них используются только в определенных условиях.

3) При выборе формулы геометрической вероятности часто используют различные меры, например, длину и площадь, или длину и объём.

Заключение

В методических рекомендациях для выполнения конкурсных заданий по математике для теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по единому направлению рассмотрен теоретический минимум для решения конкурсных задач по математике.