



ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ
МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ



Инженерный класс

В МОСКОВСКОЙ ШКОЛЕ

ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
НАПРАВЛЕНИЕ И
КУРЧАТОВСКИЕ КЛАССЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЭТАП



МОСКВА
2025



ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ
МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ РАЗРАБОТАНЫ:

Зотов В.В., доцент кафедры горного оборудования, транспорта и
машиностроения НИТУ МИСИС

Адигамов А.Э., доцент кафедры математики НИТУ МИСИС

Блохин Д.И., доцент кафедры физики НИТУ МИСИС

Минаев В.И., доцент кафедры физики НИТУ МИСИС

Нестерова В.Г., доцент кафедры физики НИТУ МИСИС

МОСКВА
2025

Содержание

Введение	4
Раздел 1. Общие указания к решениям задач по физике	6
Раздел 2. Общие указания к решениям задач по информатике.....	13
Раздел 3. Общие указания к решениям задач по математике	18
Список литературы.....	24

Введение

Данные краткие методические указания к заданиям теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлениям Инженерно-техническому и Курчатовские классы (далее Конкурс).

Методические материалы подготовлены на основании «Спецификация конкурсных материалов для проведения теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлению Инженерно-техническому и Курчатовские классы» (далее Спецификация) и разработанного в соответствии со Спецификацией демонстрационного варианта заданий теоретического этапа.

Профильными предметами, знания по которым проверяются в рамках направлений Инженерно-техническое и Курчатовские классы являются математика, физика, информатика.

Методические указания предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих подготовку обучающихся предпрофессиональных классов в рамках проекта «Инженерный класс в московской школе», с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационного варианта, возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок.

Теоретический этап Конкурса проводится в форме компьютерного тестирования. Используемое оборудование: компьютер, подключенный к интернету, с колонками и микрофоном. На выполнение заданий теоретического этапа Конкурса отводится 120 минут. Во время выполнения работы разрешается использовать обычный встроенный калькулятор.

В контрольно-измерительных материалах используются задания базового и повышенного уровня сложности, с выбором одного ответа из нескольких предложенных и с кратким ответом. Индивидуальный вариант участника включает 8 заданий, базирующихся на содержании предметов:

математика, физика, информатика. Задание считается выполненным, если ответ участника совпал с эталоном. Максимальный балл за выполнение всех заданий – 60 баллов.

При подготовке к теоретической части рекомендуется изучить Спецификацию и демовариант заданий, а также дополнительно просмотреть специально подготовленные видеоматериалы, опубликованные на сайте <https://im.mcko.ru/mo.php> в соответствии с выбранными направлениями и номинациями Конкурса.

Во всех материалах используется общая сквозная нумерация задач в соответствии со Спецификацией.

Все материалы Конкурса размещены на сайте <https://im.mcko.ru/>.

Раздел 1. Общие указания к решениям задач по физике

1.1. Гармонические колебания

Многие физические процессы характеризуются периодическим изменением той или иной физической величины (например координаты или электрического заряда). В таких процессах изменение этой физической величины повторяется через строго определённое время – период. Для любой периодической функции $f(t)$ мы можем записать:

$$f(t) = f(t + T),$$

где T – период.

Если во время периодического процесса изменение физической величины постепенно уменьшается – такие колебания называют затухающими. В зависимости от природы процесса различают колебания: механические, электромагнитные и т.д. А в зависимости от характера воздействия на колеблющееся тело различают свободные (собственные) или вынужденные колебания.

Гармоническими колебаниями называют такие процессы, в которых изменение физической величины происходит по закону синуса (или косинуса).

Для примера рассмотрим систему, состоящую из невесомой пружины и небольшого груза, закреплённого на пружине (рис. 1). В состоянии покоя центр масс груза находится в точке с координатой $x_0 = 0$. При этом будем считать, что груз может двигаться по горизонтальной поверхности без трения. Затем мы немного сожмём пружину, центр масс груза переместится в точку с координатой x .

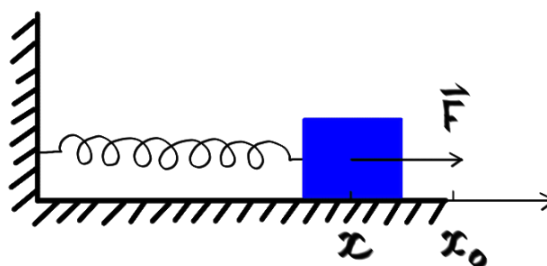


Рисунок 1.

Запишем второй закон Ньютона для системы пружина-груз в проекции на горизонтальную ось OX , при этом воспользуемся определением ускорения $a = \ddot{x}$:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Преобразуем предыдущее выражение к виду:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Рассматривая аналогичную ситуацию малых колебаний математического маятника (рис.2), запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную в точке траектории, по которой движется груз, подставляя тангенциальное ускорение в виде $a_\tau = l\ddot{\varphi}$:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi.$$

Для случая малых углов отклонения это уравнение мы можем привести к виду:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

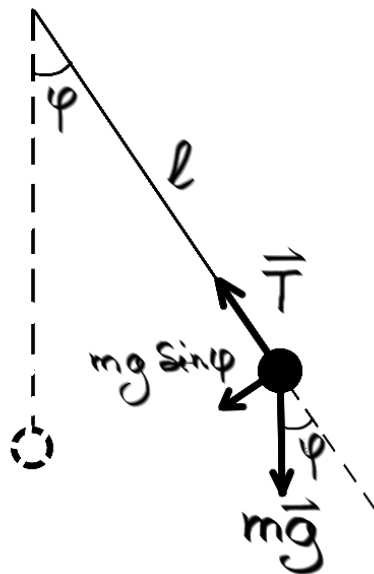


Рисунок 2.

В обоих случаях мы получили уравнения одного вида, которое называется уравнением свободных гармонических колебаний. Множитель, стоящий перед координатой во втором слагаемом, принимают равным ω^2 , где

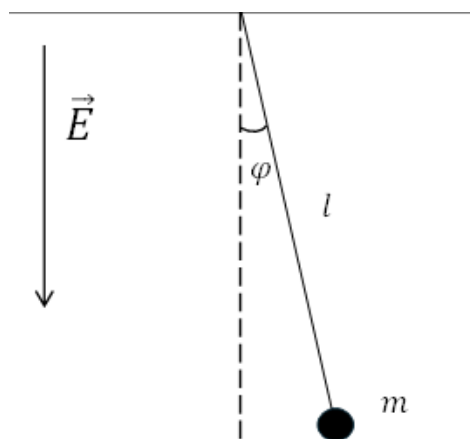
ω – собственная частота колебаний. При этом ω связана с периодом колебаний T следующим соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Давайте рассмотрим одну из задач демонстрационного варианта конкурсных заданий на тему «Гармонические колебания».

Задача 1.

Небольшой грузик массой $m = 10$ г подвесили на длинной, невесомой и нерастяжимой нити длиной $l = 25$ см и отклонили на небольшой угол φ от положения равновесия. После чего он стал совершать малые колебания в поле силы тяжести. Затем грузик остановили и сообщили ему некоторый заряд q . После чего всю систему поместили в однородное электрическое поле напряжённостью $E = 3$ кВ/м, силовые линии которого направлены как показано на рисунке. И снова отклонили, как предыдущем случае на малый угол φ , при этом период колебаний уже составил $T_2 = 0,5$ с. Определите период колебаний грузика до включения поля и какой заряд в мкКл сообщили шарiku во втором случае q . Ускорение свободного падения в расчётах принять равным $g = 10$ м/с², ответы округлите до целых чисел.



Решение

Частота колебаний математического маятника в поле силы тяжести равна:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Соответственно для периода колебаний в первом случае мы получим:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную в точке траектории, по которой движется груз для второго случая:

$$ml\ddot{\varphi} = -(qE + mg) \sin \varphi.$$

Уравнение малых колебаний будет иметь вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{qE + mg}{ml} \varphi = 0.$$

Из этого уравнения мы можем определить частоту ω_2 и период T_2 :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{qE + mg}{ml}},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{qE + mg}}.$$

Период T_2 задан в условии задачи, остаётся выразить заряд q :

$$q = \frac{4\pi^2 ml}{ET_2^2} - \frac{mg}{E}.$$

Подставим числа из условия задачи:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{0,25}{10}} \approx 1 \text{ с},$$

$$q = \frac{4 \cdot 9,86 \cdot 0,01 \cdot 0,25}{3000 \cdot 0,25} - \frac{0,01 \cdot 10}{3000} \approx 98 \text{ мкКл}.$$

Ответ: 1 с; 98 мкКл

1.2. Закон сохранения механической энергии

Энергия – это мера движения и взаимодействия материи в любых формах. Любое взаимодействие на тело некоторой силой сопровождается передачей энергии:

$$\Delta A = F \cdot \Delta S \cos \alpha,$$

где - ΔS – малое перемещение тела, α – угол между векторами силы F и перемещения ΔS , а ΔA – работа по перемещению тела.

Если энергия передаётся движущемуся телу – совершается «положительная» работа, в противном случае – совершается «отрицательная» работа.

Работа, совершаемая некоторой силой при малом перемещении тела равна изменению величины $\frac{1}{2}mv^2$, которую называют кинетической энергией движущегося тела

$$A = E_{k2} - E_{k1}.$$

Силы, работа которых не зависит от вида траектории, а определяется начальным и конечным положениями тела, называют консервативными. Работа, которая совершается над телом в силовом поле, равна положительной величине, если потенциальная энергия тела убывает.

Вблизи поверхности Земли все тела падают с постоянным ускорением g , направленным к центру планеты. Если мы рассматриваем движение в области, линейные размеры которой много меньше радиуса Земли, земную поверхность можно считать плоской. В этом приближении поле тяжести однородно: силы, действующие на тело, в любой точке имеют одинаковое направление и величину:

$$F = mg.$$

В таком случае для работы по перемещению тела в поле силы тяжести мы получим:

$$A = mgh_2 - mgh_1.$$

Величину mgh , называют потенциальной энергией в поле силы тяжести Земли.

Для замкнутой системы (на которую не действуют внешние силы или их действие компенсирует друг друга) выполняется условие:

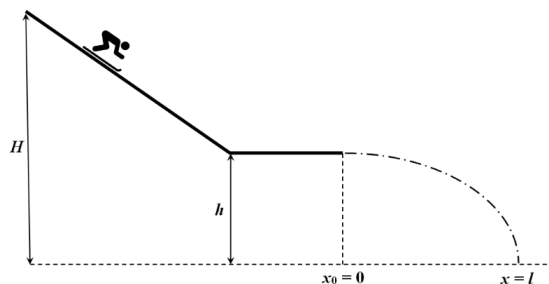
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{Const.}$$

Полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остаётся постоянной.

Давайте рассмотрим одну из задач демонстрационного варианта конкурсных заданий на тему: «Закон сохранения механической энергии».

Задача 2.

Невысокая гладкая горка, высотой $H = 10$ м заканчивается горизонтальным трамплином, высоту h которого можно менять. С вершины горки, без начальной скорости, съезжает лыжник, а затем он,



оторвавшись от трамплина, приземляется на расстоянии l от основания трамплина. Определите сколько процентов от высоты горки H должна составлять высота трамплина h , чтобы дальность полёта лыжника l была максимальной. Ускорение свободного падения в расчётах принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$, ответы округлите до целых чисел.

Решение.

По условию задачи горка гладкая – следовательно мы можем считать, что сила трения лыж равна нулю. За всё время движения лыжника по горке и трамплину на него действует только сила тяжести, наша механическая система замкнутая, соответственно мы можем полагать, что механическая энергия лыжника не изменяется.

Запишем энергию E лыжника в верхней точке горки (при этом он неподвижен):

$$E = mgH.$$

А на краю горизонтального трамплина, лыжник движется со скоростью v , эта энергия будет равна:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh.$$

Приравнивая правые части этих выражений, получим:

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mgh.$$

Откуда выразим скорость, с которой лыжник отрывается от трамплина:

$$v = \sqrt{2g(H - h)}.$$

Запишем кинематические выражения для координат лыжника после отрыва от трамплина:

$$x(t) = vt,$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Подставляем полученное выражение для скорости v в $x(t)$ получим:

$$x(t) = \sqrt{2g(H - h)}t.$$

Затем выражаем время t :

$$t = \frac{x(t)}{\sqrt{2g(H - h)}}.$$

И подставляя в $y(t)$ получаем уравнение траектории полёта лыжника:

$$y(x) = h - \frac{x^2}{4(H - h)}.$$

В момент приземления лыжника $y(x) = 0$, в таком случае:

$$h = \frac{x^2}{4(H - h)},$$

$$x = 2\sqrt{h(H - h)}.$$

Чтобы найти максимальную дальность полёта $x_{\max}$ вычислим $\frac{dx}{dh}$ и приравняем это выражение к нулю:

$$\frac{dx}{dh} = \frac{H - 2h}{\sqrt{h(H - h)}} = 0.$$

Откуда легко получить искомое соотношение $\frac{h}{H}$:

$$H - 2h = 0,$$

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{2}.$$

Дальность полёта лыжника будет максимальна в том случае, когда высота трамплина составляет 50% от высоты горки.

Ответ: 50%

Раздел 2. Общие указания к решениям задач по информатике

Одна из задач демонстрационного варианта посвящена теме представления целых чисел в дополнительном коде. В связи с этим ниже рассмотрим основные теоретические сведения для решения задач.

Дополнительный код наиболее распространённый способ представления отрицательных целых чисел. Он позволяет заменить операцию вычитания на операцию сложения и сделать операции сложения и вычитания одинаковыми для знаковых и беззнаковых чисел. Дополнительный код для отрицательного числа можно получить инвертированием его двоичного модуля (получается "первое дополнение") и прибавлением к инверсии единицы (получается "второе дополнение"), либо вычитанием числа из нуля (сразу получается "второе дополнение"). Дополнительный код двоичного числа определяется как величина, полученная вычитанием числа из наибольшей степени двух.

При записи числа в дополнительном коде старший разряд является знаковым. Если значение старшего разряда равно 0, то это значит, что в остальных разрядах записано положительное двоичное число, совпадающее с прямым кодом.

Двоичное 8-разрядное число со знаком в дополнительном коде может представлять любое целое в диапазоне от -128 до $+127$. Если старший разряд равен нулю, то наибольшее целое число, которое может быть записано в оставшихся 7 разрядах, равно $2^7 - 1 = 127$.

Далее рассмотрим, как преобразовать числа из прямого кода в дополнительный код. Преобразование числа из прямого кода в дополнительный осуществляется по следующему алгоритму.

1. Если старший (знаковый) разряд числа, записанного в прямом коде, равен 0, то число положительное и никаких преобразований не делается;

2. Если старший (знаковый) разряд числа, записанного в прямом коде, равен 1, то число отрицательное, все разряды числа, кроме знакового, инвертируются, а к результату прибавляется 1.

Для примера преобразуем отрицательное число -5, записанное в прямом коде, в дополнительный код.

Прямой код отрицательного числа -5:

1000 0101

Инвертируем все разряды числа, кроме знакового, получая таким образом обратный код (первое дополнение) отрицательного числа -5:

1111 1010

Добавим к результату 1, получая таким образом дополнительный код (второе дополнение) отрицательного числа -5:

1111 1011

Для преобразования отрицательного числа -5, записанного в дополнительном коде, в положительное число, записанное в прямом коде, используется похожий алгоритм:

Инвертируем все разряды отрицательного числа -5, получая таким образом положительное число 4 в прямом коде:

0000 0100

Добавив к результату 1 получим положительное число 5 в прямом коде:

0000 0101

И проверим, сложив получившееся записи 5 и -5:

$0000\ 0101 + 1111\ 1011 = 0000\ 0000$ (пятый и старшие разряды выбрасываются).

Задача 1.

В 8-битной системе дополнительного кода хранятся двоичные числа:

A = 11110000

B = 00001111

Вычислите значение выражения $A + B$ и представьте результат в 8-битном дополнительном коде.

Решение.

Числа даны в двоичном виде, поэтому сначала определим их десятичные значения. В дополнительном коде старший бит указывает знак числа.

Для $A = 11110000_2$ старший бит равен 1, значит A отрицательное. Найдём его значение: инвертируем все биты (кроме знакового) и прибавим 1.

Инверсия 11110000_2 даёт 00001111_2 ; добавив 1, получаем 00010000_2 , то есть 16 в десятичном.

Следовательно, $A = -16$. Число $B = 00001111_2$ имеет старший бит 0, оно положительное и равно 15 (поскольку $00001111_2 = 15$).

Теперь сложим: $-16 + 15 = -1$. Число -1 в 8-разрядном дополнительном коде представляется как 11111111 (все биты 1). Таким образом, сумма $A + B = -1$, что в требуемом 8-битном формате есть 11111111 .

Ответ: 11111111 .

Задача 2.

Даны числа $A = 00001111_2$ и $B = 00001001_2$ (8 бит, дополнительный код). Найдите $A + B$.

Решение.

Число $A = 00001111_2$. Старший бит = 0, значит A положительное. Его десятичное значение: $0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$.

Число $B = 00001001_2$. Старший бит = 0, значит B положительное. Его десятичное значение: $0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 1 = 9$.

Сложим десятичные значения: $15 + 9 = 24$. Это значение в диапазоне – 128...127, переполнения нет.

Результат вычисления составляет 24.

Ответ: 24.

Задача 3.

В вычислительной системе используется 16-битное целочисленное представление в дополнительном коде.

В регистре хранится значение:

111111110011100

1. Определите, какое десятичное число закодировано.
2. Прибавьте к этому числу десятичное значение 300.
3. Представьте результат в 16-битном дополнительном коде.

Формат ответа: – Результат в 16-битном дополнительном коде: ...

Решение.

Дано 16-битное число в дополнительном коде:

111111110011100

Проверка знака: старший бит равен 1, значит, число отрицательное.

Перевод из дополнительного кода в десятичное число. Инвертируем все биты:

$111111110011100 \rightarrow 0000000001100011$

Добавляем 1:

$0000000001100011 + 1 = 0000000001100100$

Переводим в десятичное значение:

$0000000001100100_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 64 + 32 + 4 = 100$

Берём со знаком минус: число равно -100.

Прибавление десятичного значения 300. Вычисляем:

$-100 + 300 = 200$

Результат сложения: 200.

Представление числа 200 в 16-битном дополнительном коде.

Проверка знака. Число 200 положительное, поэтому его дополнительный код совпадает с прямым двоичным представлением.

Перевод 200 в двоичную систему:

Делим число на 2 и записываем остатки:

$$200 \div 2 = 100 \text{ (0)}$$

$$100 \div 2 = 50 \text{ (0)}$$

$$50 \div 2 = 25 \text{ (0)}$$

$$25 \div 2 = 12 \text{ (1)}$$

$$12 \div 2 = 6 \text{ (0)}$$

$$6 \div 2 = 3 \text{ (0)}$$

$$3 \div 2 = 1 \text{ (1)}$$

$$1 \div 2 = 0 \text{ (1)}$$

Записываем остатки в обратном порядке:

$$200_{10} = 11001000_2$$

Дополнение до 16 бит. Добавляем нули слева и получаем окончательный ответ:

$$0000000011001000$$

Ответ: Результат в 16-битном дополнительном коде: 0000000011001000

Раздел 3. Общие указания к решениям задач по математике

3.1. Линейные уравнения с параметром

Среди всего многообразия задач с параметрами наиболее простыми являются линейные уравнения и неравенства. Разберем ряд задач с примерами решения.

Задача 1.

При всех значениях параметра a решить уравнение $2x + a = 3$.

Решение. Аналитическое решение в данном случае достаточно простое: выражаем x и пишем ответ.

Ответ: $x = \frac{3-a}{2}$.

Задача 2.

При всех значениях параметра a решите уравнение $ax = 1$.

Решение. Напрашивается простое решение $x = \frac{1}{a}$, но нужно проявить осторожность. Ведь a «никому ничем не обязано» и может равняться нулю, а на нуль делить нельзя! Поэтому решение должно выглядеть так.

Если $a = 0$, то решений нет (поскольку вне зависимости от x получается неверное числовое равенство $0 = 1$). Если же $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

Ответ: Если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; $a = 0$, то решений нет.

Задача 3.

При всех значениях параметра a решите уравнение $(a + 2)x = a^2 - 4$.

Решение. Имеем: $(a + 2)x = (a - 2)(a + 2)$.

Если $a = -2$, то независимо от x получается верное числовое равенство $0 = 0$, так что в этом случае x любое число.

Если же $a \neq -2$, то сокращаем обе части на ненулевое выражение $(a + 2)$ и получаем

$$x = a - 2.$$

Ответ: Если $a \neq -2$, то $x = a - 2$; если $a = -2$, то x любое.

Задача 4.

При каких a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1 \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение. Выразим из первого уравнения y :

$$y = \frac{ax - a - 1}{4}, \quad (1)$$

и подставим во второе уравнение системы:

$$2x + \frac{(a + 6)(ax - a - 1)}{4} = a + 3.$$

Умножаем на 4, раскрываем скобки и приводим подобные:

$$(a^2 + 6a + 8)x = a^2 + 11a + 18.$$

Раскладываем на множители оба квадратных трёхчлена:

$$(a + 2)(a + 4)x = (a + 2)(a + 9). \quad (2)$$

Если $a \neq -2$ и $a \neq -4$, то уравнение (2) имеет единственное решение $x = \frac{a+9}{a+4}$. Подставляя это решение в (1), найдём соответствующее значение y .

Полученная пара $(x; y)$ будет единственным решением нашей системы при указанных значениях параметра a .

Если $a = -2$, то уравнение (2) превращается в верное числовое равенство $0 = 0$ независимо от x . Поэтому, любое число x является решением уравнения (2). Соотношение (1) даёт соответствующее число y , так что любая пара $\left(x; \frac{ax - a - 1}{4}\right)$ служит решением нашей системы. Стало быть, при $a = -2$ система имеет бесконечно много решений.

Наконец, если $a = -4$, то уравнение (2) превращается в неверное числовое равенство $0 = 10$ независимо от x и потому не имеет корней. Но уравнение (2) является следствием исходной системы; значит, при $a = -4$ не имеет решений и сама система.

Мы рассмотрели все возможные значения параметра a . Как видим, система не имеет решений только при $a = -4$.

Ответ: - 4.

Задача 5.

Для всех значений параметра p решите уравнение:

$$(p^2 - 1)x = p^2 - 3p + 2.$$

Решение. Приведём уравнение к виду:

$$(p - 1)(p + 1)x = (p - 1)(p - 2).$$

Если $p \neq \mp 1$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{(p-1)(p-2)}{(p-1)(p+1)} = \frac{p-2}{p+1}$.

Если $p = 1$, то исходное уравнение приобретает вид $0 \cdot x = 0$. Решением этого уравнения являются любые значения x .

Если $p = -1$, то исходное уравнение приобретает вид $0 \cdot x = 6$. Оно не имеет решений.

3.2. Нахождение наименьшего и наибольшего значений тригонометрических функций

Рассмотрим задачи нахождения наименьшего и наибольшего значений тригонометрических функций без применения производной, а основываясь только на ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 1.

Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$$y(x) = \sin^4 x + 6\cos^2 x + 4.$$

Решение. Выполним преобразования

$$y(x) = \sin^4 x + 6(1 - \sin^2 x) + 4 = \sin^4 x - 6\sin^2 x + 10 = (\sin^2 x - 3)^2 + 1.$$

Очевидно, что функция $y(x) = (\sin^2 x - 3)^2 + 1$ принимает наибольшее значение, если $\sin x = 0$, то есть $y_{\text{наиб.}} = (0 - 3)^2 + 1 = 10$.

А наименьшее значение, если $\sin^2 x = 1$, то есть

$$y_{\text{наим.}} = (1 - 3)^2 + 1 = 5.$$

Задача 2.

Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y(x) = -25\sin^2 x + 10\cos x + 29$.

Решение. Выполним преобразования

$$\begin{aligned} y(x) &= -25(1 - \cos^2 x) + 10\cos x + 29 = 25\cos^2 x + 10\cos x + 4 \\ &= (5\cos x + 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

Очевидно, что функция $y(x) = (5\cos x + 1)^2 + 3$ принимает наибольшее значение, если $\cos x = 1$, то есть $y_{\text{наиб.}} = (5 + 1)^2 + 3 = 39$.

А наименьшее значение, если $(5\cos x + 1) = 0$, то есть $\cos x = -\frac{1}{5}$. Значит $y_{\text{наим.}} = 3$.

Задача 3.

Дана функция $f(x) = \frac{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}{2\cos^4 x + \sin^2 x}$.

Найдите: наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

Решение. Имеем: $f(x) = \frac{2\sin^4 x + 3(1 - \sin^2 x)}{2(1 - \sin^2 x)^2 + \sin^2 x}$.

После замены $t = \sin^2 x$ и несложных преобразований получаем функцию

$$f(t) = \frac{2t^2 - 3t + 3}{2t^2 - 3t + 2} = 1 + \frac{1}{2t^2 - 3t + 2}, \quad t \in [0; 1]. \quad (3)$$

Значит необходимо найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(t)$ на отрезке $t \in [0; 1]$.

Для этого запишем функцию (3) в виде $f(t) = 1 + \frac{1}{\varphi(t)}$, где

$$\varphi(t) = 2t^2 - 3t + 2.$$

Дискриминант данного квадратного трёхчлена меньше нуля, поэтому функция $\varphi(t)$ принимает только положительные значения. Графиком функции $\varphi(t)$ служит парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины $t_0 = \frac{3}{4}$ принадлежит отрезку $[0; 1]$, поэтому наименьшее значение функции $\varphi(t)$ на отрезке $t \in [0; 1]$ достигается в вершине:

$$\varphi_{\min} = \varphi(t_0) = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 2 = \frac{7}{8}.$$

Наибольшего значения функция $\varphi(t)$ достигает на одном из концов отрезка $[0; 1]$:

$$\varphi(0) = 2, \quad \varphi(1) = 1 \Rightarrow \quad \varphi_{\max} = 2.$$

Теперь находим наибольшее и наименьшее значения функции $f(t)$:

$$f_{\max} = 1 + \frac{1}{\varphi_{\min}} = 1 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7};$$

$$f_{\min} = 1 + \frac{1}{\varphi_{\max}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

В некоторых случаях можно исследовать тригонометрическую функцию с помощью так называемого метода вспомогательного аргумента. Речь идёт о следующем преобразовании:

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

И поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, то точка с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ расположена на единичной окружности. Следовательно, существует такой угол φ , что $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\text{Поэтому } a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cdot \cos x + \sin \varphi \cdot \sin x).$$

Отсюда следует, что множество значений функции $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ есть отрезок $[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$.

Задача 4.

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x$.

Решение.

Из вышесказанного следует, что наименьшее значение функции равно $-\sqrt{3^2 + 4^2} = -5$, а наибольшее $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Список литературы

По физике

1. Яворский, Б. М. Основы физики: учебник : в 2 т. Том 1. Механика. Молекулярная физика. Электродинамика / Б. М. Яворский, А. А. Пинский ; под. ред. Ю. И. Дика. - 5-е изд., стер. - Москва : Физматлит, 2003. - 576 с.
2. Яворский, Б. М. Основы физики: учебник : в 2 т. Том 2. Колебания и волны. Квантовая физика. Физика ядра и элементарных частиц / Б. М. Яворский, А. А. Пинский ; под. ред. Ю. И. Дика. - 5-е изд., стер. - Москва : Физматлит, 2003. - 552 с.
3. Ландсберг, Г.С. Оптика : учеб. пособие для вузов / Г.С. Ландсберг. 7-е изд., стер. – М. : Физматлит, 2017. – 852 с.

По информатике

1. Поляков К.Ю. Информатика. 11 класс. Углубленный уровень. Учебное пособие. В 2 частях./К.Ю. Поляков, Е.А. Еремин. - Москва: Просвящение, 2024

По математике

1. Ткачук, В.В. Математика – абитуриенту /В.В. Ткачук. 15-е изд., испр. И доп. – М.: МЦНМО, 2008. – 1024 с.