



ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ
МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ



Инженерный класс

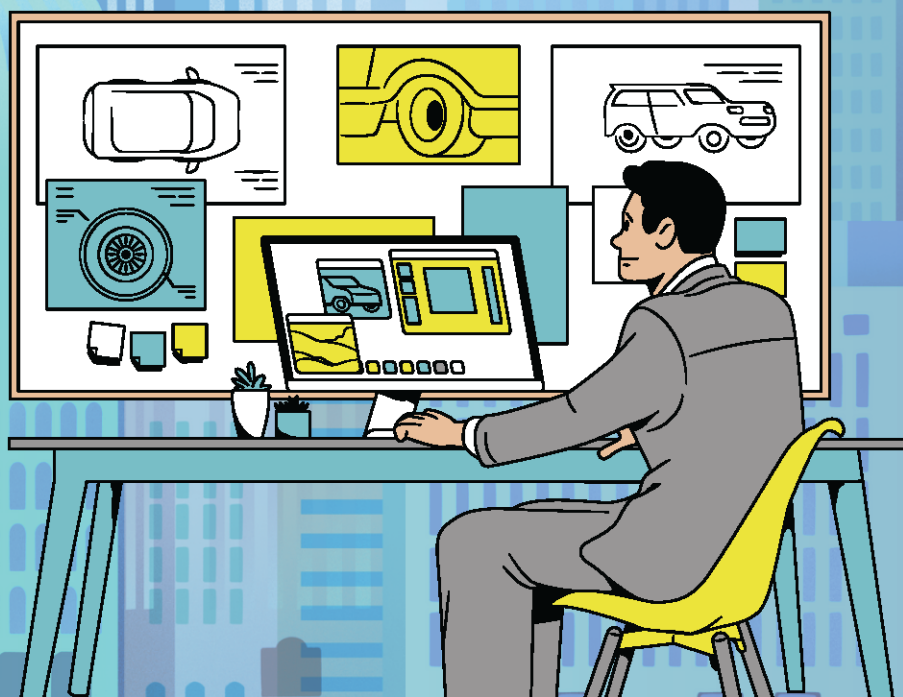
В МОСКОВСКОЙ ШКОЛЕ

ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
НАПРАВЛЕНИЕ И
КУРЧАТОВСКИЕ КЛАССЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЭТАП



МОСКВА
2025





ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ
МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ РАЗРАБОТАНЫ:

Часть 1 «Информатика»:

Абрамов Александр Валерьевич, старший преподаватель кафедры «Вычислительные системы, сети и информационная безопасность» РУТ (МИИТ)

Часть 2 «Математика»:

Родина Елена Викторовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» РУТ (МИИТ)

Часть 3 «Физика»:

Портнов Владимир Иосифович, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика» РУТ (МИИТ)

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1: «Информатика»	5
ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ПОНЯТИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ.....	6
2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ.....	11
3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ.....	15
4. РАЗБОР ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ.....	17
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	26
Часть 2: «Математика»	27
ВВЕДЕНИЕ.....	27
1. ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ.....	28
1.1 Понятие вектора. Основные понятия.....	28
1.2 Координаты точки.....	29
1.3 Координаты вектора.....	30
1.4 Формулы для простейших задач в координатах.....	31
1.5 Вычисление углов между прямыми.....	32
1.6 Уравнение сферы.....	33
1.7 Уравнение плоскости.....	34
1.8 Формулы для решения простейших задач на сферу и плоскость	34
1.9 Примеры решения задач.....	36
2. Определения и свойства чётных и нечётных функций.....	45
2.1. Определение чётной функции.	45
2.2. Определение нечётной функции	47
2.3. Свойства чётных и нечётных функций.....	51
2.4. Чётность и нечётность некоторых элементарных функций	53
2.5. Примеры решения задач.....	56
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	60
Часть 3: «Физика»	61

ВВЕДЕНИЕ.....	61
1 Механика.....	62
1.1 Особенности задач по кинематике	62
1.2 Состав кинематических задач.....	63
1.3 Примеры кинематических задач.....	63
2 Особенности задач по термодинамике	66
2.1 Нулевое начало термодинамики. Температура.....	66
2.2 Уравнения состояния	67
2.3 Газовые законы.....	68
2.4 Уравнение Менделеева-Клапейрона и закон Дальтона	68
2.5 Внутренняя энергия идеального газа.....	69
2.6 Решение демонстрационных вариантов задачи на изопроцесс.....	69
2.7 Закон сохранения энергии и 1-е начало термодинамики.....	70
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	71

Часть 1: «Информатика»

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации предназначены для подготовки к выполнению конкурсных заданий по информатике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлениям «Инженерно-техническое и Курчатовские классы».

Рассматривается необходимый теоретический минимум для решения конкурсных задач базовой сложности по информатике. Методические рекомендации сопровождаются большим количеством практических примеров.

В методических рекомендациях приведен разбор демонстрационных вариантов задания по информатике.

Предполагается ознакомление обучающегося с математическими основами логики, в частности с представлением булевых функций.

1. ПОНЯТИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Булева функция — это преобразование, определенное над аргументами, заданными двоичными переменными.

Под **двоичной переменной** будем понимать переменную, которая принимает значение из дискретного множества значений $\{0;1\}$.

Булевой функцией (БФ, в дальнейшем) от n -двоичных переменных называется их отображение во множество значений $\{0;1\}$.

Функция определяется на множестве всех возможных сочетаний аргументов E . Размерность множества конечна и определяется количеством переменных согласно формуле

$$N = 2^n$$

Иными словами, определить множество E — задать все возможные сочетания двоичных значений для n -переменных. Проще всего это сделать сопоставив десятичным числам из множества $[0..2^n-1]$ их двоичные эквиваленты.

Номер набора	$X_{n-1} X_{n-2} X_{n-3} \dots X_1 X_0$
0	000..00
1	000..01
2	000..10
2^n-1	111..11

Для определения булевой функции необходимо каждому набору из множества значений аргументов E поставить в соответствие значение $\{0;1\}$.

Пример 1.1. Пример определения булевой функции от двух переменных

x1 x2	F
0 0	1
0 1	0
1 0	1
1 1	0

Подобный способ описания булевой функции называется табличным, а таблица – таблицей истинности булевой функции.

Определим общее количество функций NF от n-переменных и введем описание основных.

$$NF = 2^{(2^n)}$$

Таким образом, существует 2 беспараметрических БФ ($NF=2^{2^0}=2$). Несложно догадаться, что это константы 0 и 1.

Для n=1 функций уже 4 ($NF=2^{2^1}=4$). Опишем их в табличной форме.

X	F0	F1	F2	F3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции F0, F3 нам уже знакомы – это константы 0 и 1.

Функция F1 тождественна x ($F1=x$), функция F2 отрицает x ($F2=\bar{x}$) и называется инверсией.

Для n=2 функций уже 16 ($NF=2^{2^2}=16$). Определим их как систему булевых функций в табличной форме.

x y	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

В таблице определены все возможные булевы функции от двух переменных, рассмотрим некоторые из них.

Функция F1 называется конъюнкцией (операцией логического И, операцией логического умножения).

x	y	F1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначается амперсандом (&), звездочкой (*), «шапочкой» ($\wedge$) или контекстом выражения.

$$F1 = x \wedge y = x * y = x \wedge y = xy$$

В контексте логики высказываний такую функцию описывают предикатом «Функция И истинна только тогда, когда истинны все ее аргументы».

Функция И может быть определена для произвольного количества аргументов, в этом случае выполняется последовательное вычисление как комбинации функций двух переменных, $F = a \wedge b \wedge c \wedge d = (((a \wedge b) \wedge c) \wedge d)$

Функция F7 называется дизъюнкцией (операцией логического ИЛИ, операцией логического суммирования).

x	y	F7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Обычно обозначается галочкой ($\vee$), реже знаком « $\vee$ ».

$$F7 = x \vee y$$

В контексте логики высказываний такую функцию описывают предикатом «Функция ИЛИ ложна только тогда, когда ложны все ее аргументы».

Функция ИЛИ может быть определена для произвольного количества аргументов, в этом случае выполняется последовательное вычисление как комбинации функций двух переменных, $F = a \vee b \vee c \vee d = ((a \vee b) \vee c) \vee d$

Функцию F8 называют стрелкой Пирса (ИЛИ-НЕ).

x	y	F8
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Описывается выражением

$$F8 = \overline{x \vee y}$$

Функция представляет собой отрицание функции ИЛИ.

Функцию F14 называют штрихом Шеффера (И-НЕ).

x	y	F14
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Описывается выражением

$$F14 = \overline{x * y}$$

Функция представляет собой отрицание функции И.

Функции F8 и F14 могут быть определены над произвольным числом аргументов, аналогично конъюнкции и дизъюнкции.

Перечисленные функции относятся к наиболее часто встречающимся на практике логическим функциям, потому что они используются для представления других булевых функций. В частности, функции И, ИЛИ, НЕ образуют основной логический базис, а каждая из функций И-НЕ, ИЛИ-НЕ - альтернативный. Остальные функции являются специальными.

Функция F6 называется суммой по модулю 2 (исключающее ИЛИ).

x	y	F6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Описанная функция обозначается символом $\oplus$.

$$F6 = x \oplus y$$

В контексте логики высказываний такую функцию описывают предикатом «Функция ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ представляет собой результат арифметического суммирования в одном разряде».

Функция F9 называется эквиваленцией.

x	y	F9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Описанная функция обозначается символом $\equiv$.

$$F9 = (x \equiv y)$$

Функция описывает тождественность ее аргументов.

Функция F11 называется импликацией.

x	y	F13
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Описанная функция обозначается символом $\rightarrow$.

$$F13 = x \rightarrow y$$

Функция описывает процедуру логического вывода, но ее значение описывает потенциальную возможность его реализации. Иными словами проверяется истинность логика высказывания может ли из x следовать y .

«Может ли из ЛЖИ следовать ЛОЖЬ ? ДА, безусловно».

«Может ли из ИСТИНЫ следовать ЛОЖЬ ? НЕТ».

В некоторых источниках, функцию импликацию сравнивают с математической функцией «меньше или равно», определенной над двумя двоичными аргументами.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Теоретическим описанием БФ называется описание функции на основе базисных функций.

Логическим базисом называется такое сочетание булевых функций посредством которого можно описать произвольную булеву функцию.

Известно три логических базиса:

1. Основной (И, ИЛИ, НЕ)
2. Базис на И-НЕ
3. Базис на ИЛИ-НЕ

Теоретическое описание любой БФ может быть построено на любом из этих базисов. Общая схема такого подхода выглядит следующим образом:

1. Построение описания на совершенных формах (ДСНФ/КСНФ)
2. Упрощение описания с целью уменьшения количества букв в записи при сохранении равнозначности

Чаще всего упрощенные булевы функции представляют в следующих видах:

4. Дизъюнктивная нормальная форма
5. Конъюнктивная нормальная форма
6. Форма с использованием специальных функций

Под нормальными формами понимаются представления определенного вида, содержащие операции основного логического базиса. Переменные входят в нормальную форму — в виде литералов, имеющих для некоторой переменной x вид x или $\text{НЕ-}x$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется нормальная форма, в которой формула представлена как дизъюнкция конъюнкций литералов.

Примеры ДНФ: $f = a \wedge b \vee c, f = a \wedge b \vee c \wedge b \vee a \wedge c$

Примеры не-ДНФ: $f = a \wedge b \oplus c, f = (a \vee b) \wedge c$

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется нормальная форма, в которой формула представлена как конъюнкция дизъюнкций литералов.

Примеры КНФ: $f = (a \vee b) \wedge (c \vee d), f = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee d)$

Примеры не-КНФ: $f = (a \vee b) \oplus (c \vee d), f = (a \wedge b) \vee c$

Форма с использованием специальных функций может содержать в себе литералы, фрагменты КНФ/ДНФ, объединенные посредством специальных функций.

Примеры таких функций: $f = (a \vee b) \oplus (c \vee d)$, $f = (a \wedge b \vee \bar{d}) \rightarrow c$.

На практике часто встречаются задачи преобразования описаний функций, в частности, преобразование теоретического описания в табличному (к таблице истинности) или преобразование табличного описания в теоретическому.

Рассмотрим примеры преобразования теоретического описания к табличному, иными словами построим таблицу истинности заданной функции по ее формульной записи.

Пример 1.2. Построить таблицу истинности функции $f1 = \bar{x} \oplus y$

Аргументов у функции $n=2$, плотность множества $E N = 2^2 = 4$

x y	$f1 = \bar{x} \oplus y$
0 0	(0/1)?
0 1	(0/1)?
1 0	(0/1)?
1 1	(0/1)?

Для расчета значений $f1$ обратимся к таблицам истинности функций инверсии и исключающего ИЛИ и отметим, что

1) $\bar{0} = 1; \bar{1} = 0$ (инверсия)

2) $0 \oplus 0 = 0; 0 \oplus 1 = 1; 1 \oplus 0 = 1; 1 \oplus 1 = 0$ (исключающее ИЛИ)

Получим

$$f1(0,0) = \bar{0} \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1$$

$$f1(0,1) = \bar{0} \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$f1(1,0) = \bar{1} \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0$$

$$f1(1,1) = \bar{1} \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1$$

x y	$\bar{x}$	$f1 = \bar{x} \oplus y$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	0
1 1	0	1

Пример 1.3. Построить таблицу истинности функции $f2 = \overline{(\bar{x} \equiv y) \rightarrow yz}$

Для расчета значений $f2$ обратимся к таблицам истинности функций инверсии, эквиваленции и импликации и отметим, что

- 1) $\bar{0} = 1; \bar{1} = 0$ (инверсия)
- 2) $0 \equiv 0 = 1; 0 \equiv 1 = 0; 1 \equiv 0 = 0; 1 \equiv 1 = 1$ (эквиваленция)
- 3) $0 \rightarrow 0 = 1; 0 \rightarrow 1 = 1; 1 \rightarrow 0 = 0; 1 \rightarrow 1 = 1$ (импликация)

Расчет таблицы истинности функции ведется последовательно с учетом приоритета операций:

- 1) Действия в скобках
- 2) Инверсия
- 3) Конъюнкция
- 4) Дизъюнкция
- 5) Импликация
- 6) Исключающее ИЛИ, эквиваленция

x y z	$\bar{x}$	$\bar{x} \equiv y$	yz	$(\bar{x} \equiv y) \rightarrow yz$	$f2 = \overline{(\bar{x} \equiv y) \rightarrow yz}$
0 0 0	1	0	0	1	0
0 0 1	1	0	0	1	0
0 1 0	1	1	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1	0
1 0 0	0	1	0	0	1
1 0 1	0	1	0	0	1
1 1 0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	1	1	0

Таким образом, по теоретическому описанию восстанавливается таблица истинности.

В общем случае, переход к теоретическому описанию функции от табличного представляет собой задачу построения равнозначной функции решение которой достаточно сложно, поэтому в контрольных задачах ограничимся проверкой эквивалентности.

3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Две булевых функции считаются эквивалентными, если полностью совпадают множества их единичных и нулевых наборов.

Пример 1.4. Проверить на равнозначность функции $f1 = \bar{x} \oplus y$ и $f2 = x \oplus \bar{y}$

Для решения задачи построим таблицу истинности функций $f1$ и $f2$.

$x \ y$	$f1 = \bar{x} \oplus y$	$f2 = x \oplus \bar{y}$
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	0	0
1 1	1	1

Отмечаем, что множества единичных и нулевых наборов функции $f1$ и $f2$ полностью совпадают, и значит, функции равнозначны.

Пример 1.5. Проверить на равнозначность функции $f3 = x \oplus y$ и $f1 = \bar{x} \oplus y$

Для решения задачи построим таблицу истинности функций $f3$ и $f1$.

$x \ y$	$f3 = x \oplus y$	$f1 = \bar{x} \oplus y$
0 0	0	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

Отмечаем, что множества единичных и нулевых наборов функции $f3$ и $f2$ не совпадают, и значит, функции неравнозначны.

Проверка на эквивалентность является частью более общей задачи восстановления теоретического описания функции по табличному. В этом случае надо иметь таблицу истинности исходной функции и набор теоретических описаний, которые проверяются на эквивалентность таблице истинности исходной функции.

Пример 1.6. Восстановить по табличному описанию теоретическое.

Функция от трех переменных задана своей таблицей истинности.

Таблица истинности булевой функции F имеет вид

$x \ y \ z$	f
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

Укажите, какая функция соответствует функции f :

- $f1 = x * y * z \vee \bar{x} * \bar{y} * \bar{z}$
- $f2 = x * y * z \vee \bar{y} * \bar{z}$

- $f_3 = x * y * z \vee \bar{x} * \bar{y} * \bar{z} \vee \bar{x} * y * z$

Для решения задачи построим таблицу истинности функций f_1 , f_2 и f_3 .

x y z	f	f1	f2	f3
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	0	0	0	0
0 1 0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1
1 0 0	1	0	1	0
1 0 1	0	0	0	0
1 1 0	0	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

Отмечаем, что множества единичных и нулевых наборов функций

- f и f_1 не совпадают;
- f и f_2 совпадают;
- f и f_3 не совпадают.

Таким образом, таблице истинности соответствует $f_2 = x * y * z \vee \bar{y} * \bar{z}$

4. РАЗБОР ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Булева функция представлена следующей таблицей истинности

x y z	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

Среди перечисленных ниже дизъюнктивных представлений определите описание, соответствующее ей.

$$1) F = \bar{x} \wedge u \vee x \wedge \bar{u} \wedge z \vee x \wedge u \wedge z$$

$$2) F = \bar{x} \wedge u \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{u} \wedge z$$

$$3) F = \bar{x} \wedge u \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{u} \wedge z \vee x \wedge u \wedge z$$

В ответе укажите номер функции

Ответ...

Решение

Задача может быть решена двумя способами:

1) путем построения таблиц истинности заданных функций и сравнением с заданной таблицей истинности

2) восстановлением дизъюнктивной нормальной формы из заданной таблицы и сравнением ее с заданными функциями

Способ 1.

Задачу решаем сравнением заданной таблицы истинности с построенными таблицами истинности проверяемых функций. Функции считаются идентичными при **полном** совпадении множеств единичных и нулевых наборов.

Таблица истинности строится для функции от 3-х переменных на наборах значений (000,001,010,011, 100,101,110,111)

Построим таблицы истинности всех заданных функций, ориентируясь на логику ДНФ. Для этого разобьем функцию на части (конъюнкции литералов), объединенные между собой операциями дизъюнкции.

$x y z$	$\bar{x}\wedge y$	$x\wedge\bar{y}\wedge z$	$x\wedge y\wedge z$	$F = \bar{x}\wedge y\vee x\wedge\bar{y}\wedge z\vee x\wedge y\wedge z$	F
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	1	1
0 1 1	1	0	0	1	0
1 0 0	0	0	0	0	0
1 0 1	0	1	0	1	1
1 1 0	0	0	0	0	0
1 1 1	0	0	1	1	1

Далее строим таблицы истинности остальных функций.

$x y z$	$\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z}$	$x\wedge\bar{y}\wedge z$	$F = \bar{x}\wedge y\wedge\bar{z}\vee x\wedge\bar{y}\wedge z$	F
0 0 0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	1	1
0 1 1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	0	0	0
1 1 1	0	0	0	1

$x y z$	$\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z}$	$x\wedge\bar{y}\wedge z$	$x\wedge y\wedge z$	$F = \bar{x}\wedge y\wedge\bar{z}\vee x\wedge\bar{y}\wedge z\vee x\wedge y\wedge z$	F
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	1	1
0 1 1	0	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	0
1 0 1	0	1	0	1	1
1 1 0	0	0	0	0	0
1 1 1	0	0	1	1	1

Видим, что с исходной функцией F полностью совпадает из пункта 3, а значит, она является эквивалентной ей.

Ответ: 3

Возможно альтернативное решение.

Способ 2.

Задачу решаем сравнением восстановлением функции по заданной таблице истинности и поиску ее среди указанных по варианту.

ДНФ по указанному варианту состоит из трех конъюнкций (по числу единичных наборов функции), объединяемых между собой операцией дизъюнкции.

Каждая из конъюнкций имеет значение 1 лишь на одном из наборов, поэтому для каждого из наборов нужно построить ее описание из литералов.

Для набора $\{xyz\} = \{010\}$ конъюнкция литералов должна вычисляться как $f(010) = 1 \wedge 1 \wedge 1$, откуда следует, что x и z , должны входить в нее с инверсией.

$$F = f(010) \vee f(101) \vee f(111)$$

$$f(xyz) = f(010) = 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = \bar{0} \wedge 1 \wedge \bar{0} = \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$$

$$f(xyz) = f(101) = 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1 \wedge \bar{0} \wedge 1 = x \wedge \bar{y} \wedge z$$

$$f(xyz) = f(111) = 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = x \wedge y \wedge z$$

$$F = \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge y \wedge z$$

Вычисленной функции соответствует функция из пункта 3, поэтому
Ответ 3.

Решение значительно проще и быстрее предыдущего, поскольку не требует значительных расчетов.

Вариант 2

Булева функция представлена следующей таблицей истинности

$x y z$	F
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

Среди перечисленных ниже конъюнктивных представлений определите описание, соответствующее ей.

- 1) $F = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$
- 2) $F = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$
- 3) $F = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

В ответе укажите номер функции

Ответ...

Решение

Задание аналогично предыдущему имеет два способа решения.

Способ 1.

Задачу решаем сравнением заданной таблицы истинности с построенными таблицами истинности проверяемых функций. Функции считаются идентичными при **полном** совпадении множеств единичных и нулевых наборов.

Построим таблицы истинности всех заданных функций, ориентируясь на логику КНФ. Для этого разобьем функцию на части (дизъюнкции литералов), объединенные между собой операциями конъюнкции.

$x y z$	$(x \vee \bar{y} \vee z)$	$(\bar{x} \vee y)$	$x \wedge y \wedge z$	$F = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$	F
0 0 0	1	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	0	1	0	1
1 0 1	1	0	1	0	0
1 1 0	1	1	1	1	1
1 1 1	1	1	0	0	0

Далее строим таблицы истинности остальных функций.

$x y z$	$(x \vee \bar{y} \vee z)$	$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$	$F = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$	F
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1
1 0 1	1	0	0	0
1 1 0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	0

$x y z$	$(x \vee \bar{y} \vee z)$	$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$	$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$	$F = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$	F
0 0 0	1	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	1
1 0 1	1	0	1	0	0
1 1 0	1	1	1	1	1
1 1 1	1	1	0	0	0

Видим, что с исходной функцией F полностью совпадает из пункта 3, а значит, она является эквивалентной ей.

Ответ: 3

Возможно альтернативное решение.

Способ 2.

Задачу решаем сравнением восстановлением функции по заданной таблице истинности и поиску ее среди указанных по варианту.

КНФ по указанному варианту состоит из трех дизъюнкций (по числу нулевых наборов функции), объединяемых между собой операцией конъюнкции.

Каждая из конъюнкций имеет значение 0 лишь на одном из наборов, поэтому для каждого из наборов нужно построить ее описание из литералов.

Для набора $\{xyz\} = \{010\}$ дизъюнкция литералов должна вычисляться как $f(010) = 0 \vee 0 \vee 0$, откуда следует, что y должен входить в нее с инверсией.

$$F = f(010) \wedge f(101) \wedge f(111)$$

$$f(xyz) = f(010) = 0 = 0 \vee 0 \vee 0 = 0 \vee \bar{1} \vee 0 = x \vee \bar{y} \vee z$$

$$f(xyz) = f(101) = 0 = 0 \vee 0 \vee 0 = \bar{1} \vee 0 \vee \bar{1} = \bar{x} \vee y \vee \bar{z}$$

$$f(xyz) = f(111) = 0 = 0 \vee 0 \vee 0 = \bar{1} \vee \bar{1} \vee \bar{1} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$$

$$F = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

Вычисленной функции соответствует функция из пункта 3, поэтому
Ответ 3.

Решение значительно проще и быстрее предыдущего, поскольку не требует значительных расчетов.

Вариант 3

Булева функция представлена следующей таблицей истинности

$x y z$	F
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

Среди перечисленных ниже представлений определите описание, соответствующее ей.

1) $F = (x \rightarrow y) \vee x \wedge z$

2) $F = x \rightarrow (y \vee z)$

3) $F = x \wedge y \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})$

В ответе укажите номер функции

Ответ...

Решение

Задачу решаем сравнением заданной таблицы истинности с построенными таблицами истинности проверяемых функций. Функции считаются идентичными при **полном** совпадении множеств единичных и нулевых наборов.

Построим таблицы истинности всех заданных функций, ориентируясь на приоритет операций.

$x y z$	$(x \rightarrow y)$	$x \wedge z$	$F = (x \rightarrow y) \vee x \wedge z$	F
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1	0	1	1
0 1 0	1	0	1	1
0 1 1	1	0	1	1
1 0 0	0	0	0	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	1	0
1 1 1	1	1	1	0

Далее строим таблицы истинности остальных функций.

$x y z$	$(y \vee z)$	$F = x \rightarrow (y \vee z)$	F
0 0 0	0	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	1	1	1
1 1 0	1	1	0
1 1 1	1	1	0

$x y z$	$x \wedge y$	$(\bar{x} \vee \bar{y})$	$F = x \wedge y \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})$	F
0 0 0	0	1	1	1
0 0 1	0	1	1	1
0 1 0	0	1	1	1
0 1 1	0	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	0	0	0

Видим, что с исходной функцией F полностью совпадает из пункта 3, а значит, она является эквивалентной ей, поэтому **Ответ: 3**

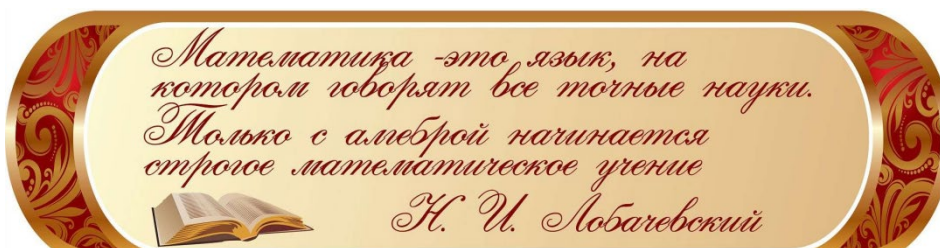
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических рекомендациях для подготовки к выполнению конкурсных заданий по информатике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлениям «Инженерно-техническое и Курчатовские классы» рассмотрен теоретический минимум для решения конкурсных задач базовой сложности по информатике.

Приведен теоретический материал по ознакомлению с основами описания булевых функций и вариантам их описания. Рассмотрено решение задач по булевым функциям и разобрано три демонстрационных варианта задания базового уровня сложности по информатике.

Часть 2: «Математика»

ВВЕДЕНИЕ



Математика – одна из самых важных и древних наук, необходимых человеку. В связи с быстрым ростом технического прогресса интерес к ней растёт и она становится всё более востребованной.

Инженеры (от латинского *ingenium* — «изобретательность, остроумная выдумка») вовлечены во все процессы технического прогресса, включая прикладные исследования, проектирование, конструирование, строительство, производство и др. Именно, инженеры, создавая новые технологии, превращают невозможное в реальность.

Для того чтобы связать свою жизнь с инженерией необходимы знания физики, информатики, химии и других наук, но все они говорят на языке математики.

Цель данного пособия заключается в успешном прохождении Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал.» по математике. В пособии сформулированы все необходимые теоретические утверждения, а также предложен разбор решений большого количества примеров по степени сложности с последующим переходом к разбору демонстрационных вариантов. В блок заданий по математике от нашего университета РУТ (МИИТ) входят: одно задание базового уровня сложности по геометрии; одно задание повышенного уровня сложности по алгебре и началам математического анализа.

1. ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ.

1.1 Понятие вектора. Основные понятия

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется **вектором**.

Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым** (рис. 1).



Рис. 1.

Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB$$

Два ненулевых **вектора** называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 2).

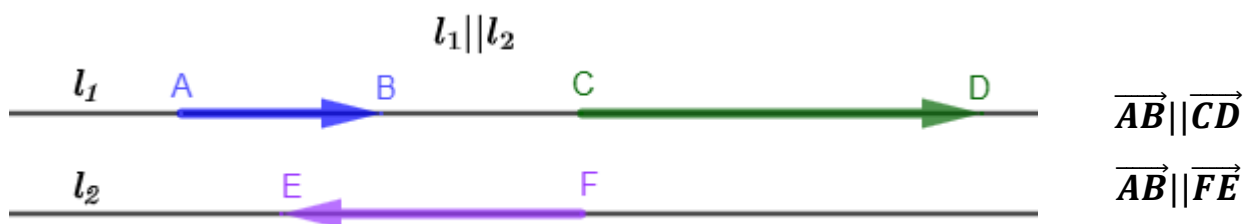


Рис. 2

Два ненулевых **вектора** называются **сонаправленными** (**противоположно направленными**), если они коллинеарны и лучи, на которых лежат эти векторы, сонаправлены (противоположно направлены). Например, на рисунке 2

$\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$ — сонаправленные, $\overrightarrow{AB} \downarrow \overrightarrow{FE}$ — противоположно направленные.

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны (рис. 3).

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$

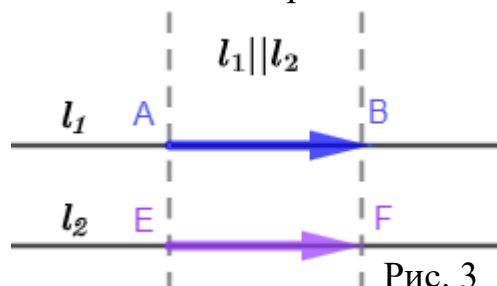


Рис. 3

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых вектора. Отложим их от произвольной точки О (рис. 4).

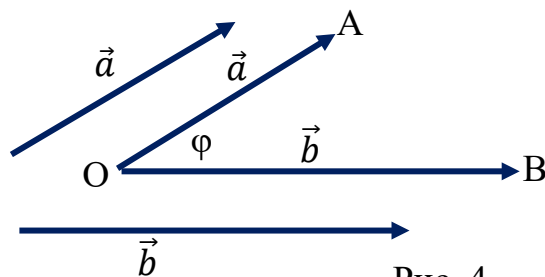


Рис. 4.

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется градусная мера φ угла АОВ.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi).$$

1.2 Координаты точки

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выберем точку М в пространстве и построим через эту точку три плоскости, перпендикулярные к осям координат (рис. 5). Обозначим M_1 , M_2 , M_3 точки пресечения этих плоскостей с осями координат соответственно. Каждой точке М пространства можно сопоставить тройку чисел (x, y, z) , которые называются её **координатами**:

$x = \pm|OM_1|$ — первая координата (**абсцисса**) точки М, «+» если M_1 — точка положительной полуоси ОХ; «-» — отрицательной полуоси ОХ;

$y = \pm|OM_2|$ — вторая координата (**ордината**)

точки М, «+» если M_2 — точка положительной полуоси ОУ; «-» — отрицательной полуоси ОУ;

$z = \pm|OM_3|$ — третья координата (**апplikата**) точки М, «+» если M_3 — точка положительной полуоси ОZ; «-» — отрицательной полуоси ОZ.

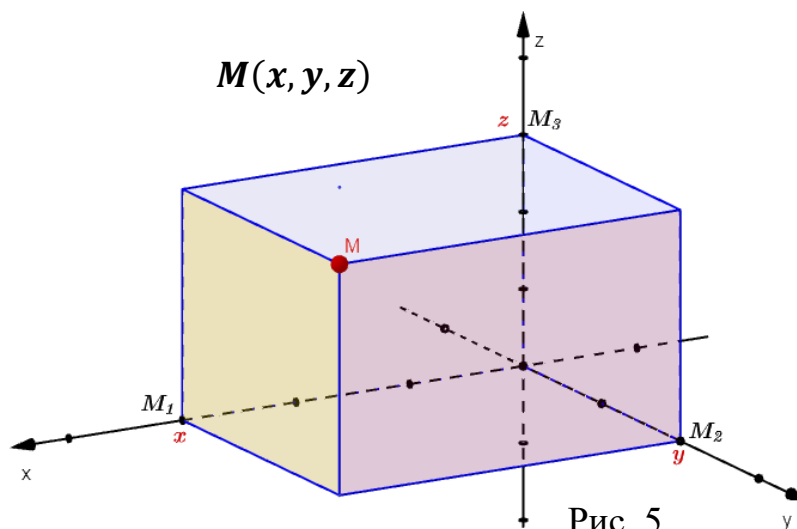


Рис. 5.

На рисунке 6

точка $A \in (Oxy)$, тогда её координаты $A(x, y, 0)$;

точка $B \in (Ox)$, тогда $B(x, 0, 0)$.

точка $C \in (Oy)$, тогда $C(0, y, 0)$.

точка $D \in (Oz)$, тогда $D(0, 0, z)$.

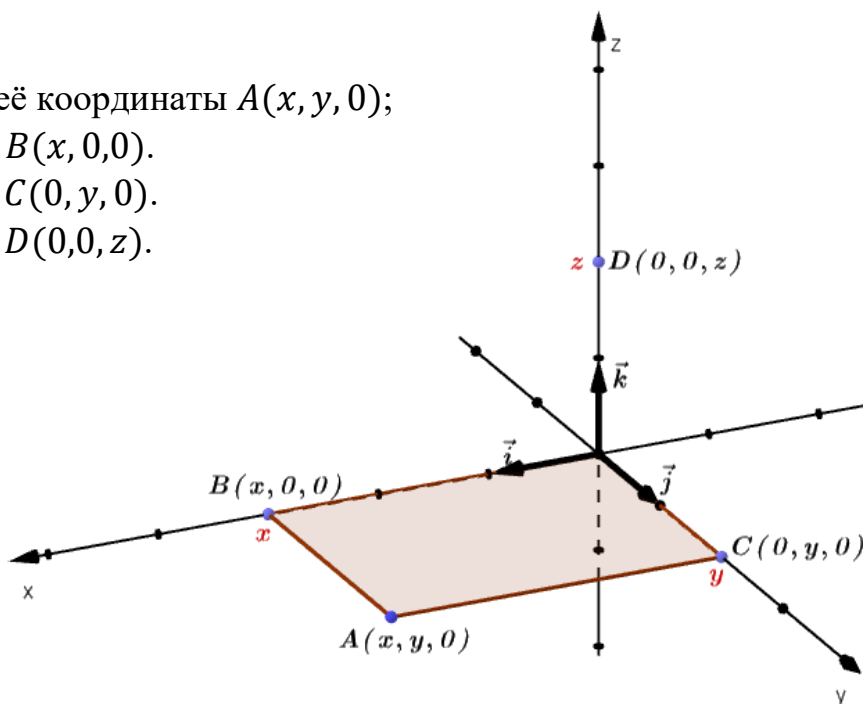


Рис. 6.

1.3 Координаты вектора

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ на каждой из положительных полуосей отложим от начала координат векторы единичной длины $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно (рис. 7). Как известно, любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде суммы координатных векторов $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Коэффициенты x , y , z называются **координатами вектора $\vec{a}$** в данной системе координат.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – координатные векторы
 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ или $\vec{a}(x, y, z)$

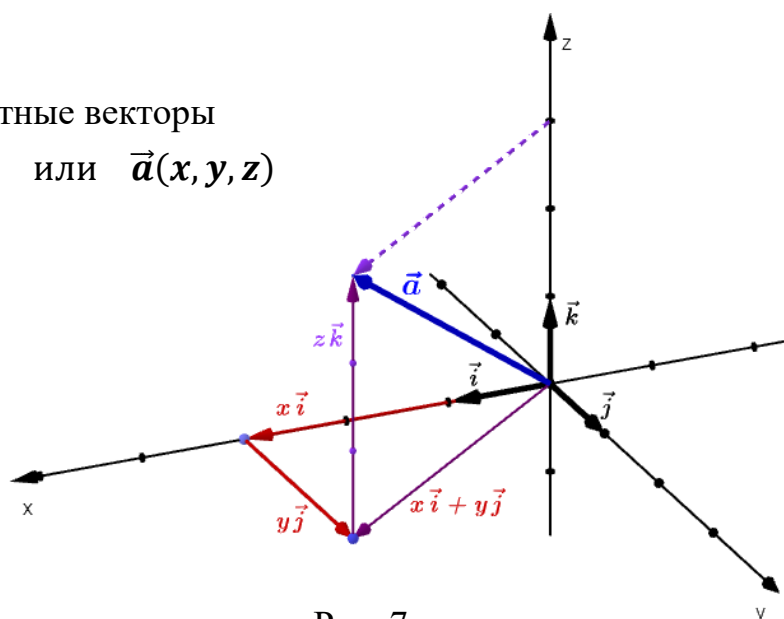


Рис. 7

Координаты точки М совпадают с координатами радиус-вектора $\vec{a}$ (рис. 8)

$$\vec{a}(x, y, z) \leftrightarrow M(x, y, z)$$

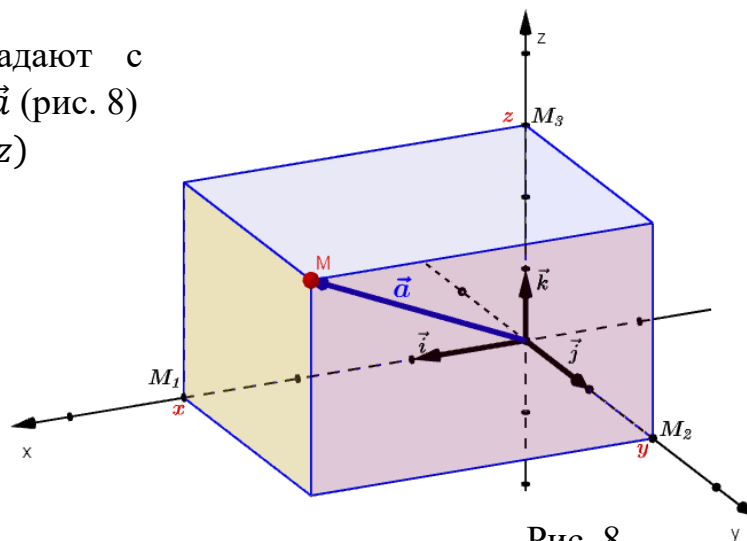
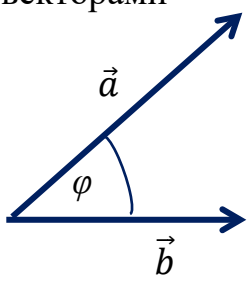
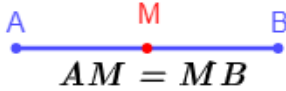


Рис. 8

1.4 Формулы для простейших задач в координатах

Название	Данные	Формула
длина вектора	$\vec{a}(x, y, z)$	$ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
коллинеарные векторы	$\vec{a}(x_1, y_1, z_1),$ $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$	$\vec{a} \parallel \vec{b} \leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$
скалярное произведение векторов	$\vec{a}(x_1, y_1, z_1),$ $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
угол между векторами 	$\vec{a}(x_1, y_1, z_1),$ $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$	$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$ или $\cos(\varphi) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
координаты вектора $\overrightarrow{AB}$	$A(x_1, y_1, z_1),$ $B(x_2, y_2, z_2)$	$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

расстояние между двумя точками	$A(x_1, y_1, z_1),$ $B(x_2, y_2, z_2)$	$ AB $ $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
координаты середины отрезка 	$A(x_1, y_1, z_1),$ $B(x_2, y_2, z_2)$	$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

1.5 Вычисление углов между прямыми

Ненулевой вектор называется **направляющим вектором прямой ℓ** , если он лежит либо на этой прямой ℓ , либо на прямой, параллельной прямой ℓ (рис. 9).

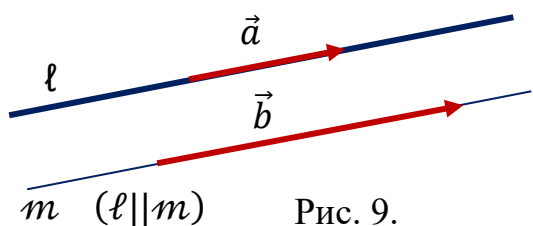


Рис. 9.

$\vec{a}$ – направляющий вектор прямой ℓ
и
 $\vec{b}$ – направляющий вектор прямой ℓ

При пересечении двух прямых получаются четыре неразвернутых угла, при этом любые два из них либо вертикальные (равные друг другу), либо смежные (их сумма равна 180°). Среди смежных углов есть угол φ , величина которого не превосходит 90° . Величину этого угла φ называют **углом между пересекающимися прямыми** (рис. 10).

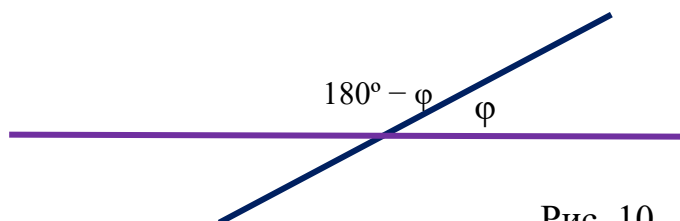


Рис. 10.

$$|\cos(\varphi)| = |\cos(180^\circ - \varphi)|$$

Пусть $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ – направляющий вектор прямой ℓ , $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ – направляющий вектор прямой m . Тогда $\widehat{\ell, m} = \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$ (рис. 11).

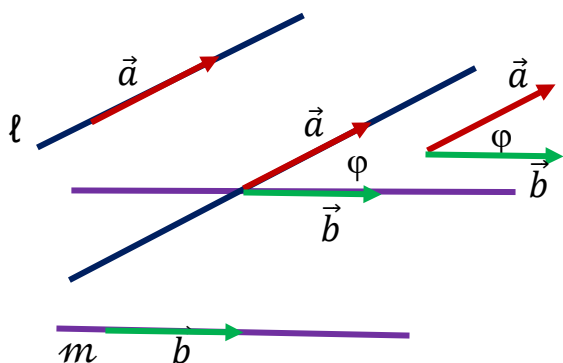


Рис. 11.

$$\cos(\widehat{\ell, m}) = |\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| = \left| \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \right|$$

1.6 Уравнение сферы

Уравнение с тремя переменными x, y, z называется **уравнением поверхности F** , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности F и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

Сфера – это поверхность, состоящая из всех точек M пространства, расположенных на заданном расстоянии R от данной точки C (рис.12). R называют **радиусом**, C – **центром**.

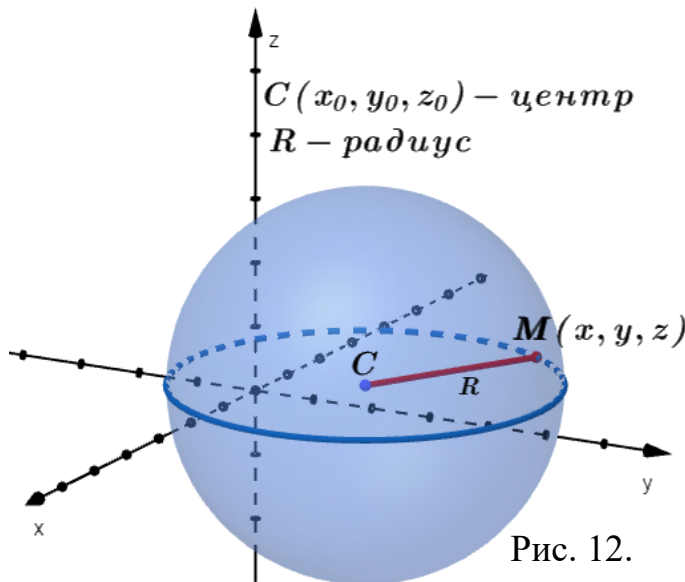


Рис. 12.

Согласно формуле расстояния между двумя точками C и M и определению сферы можно вывести уравнение сферы с центром в точке $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R :

$$\begin{cases} |CM| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \\ |CM| = R \end{cases} \implies (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

1.7 Уравнение плоскости

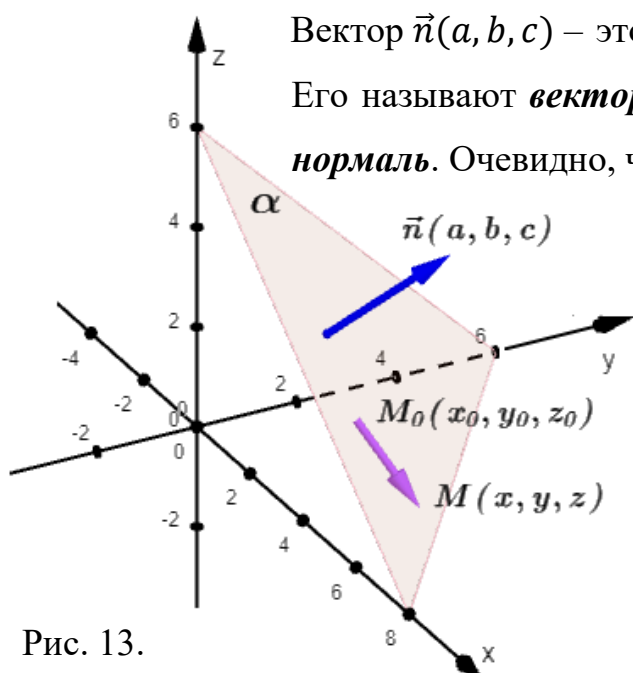


Рис. 13.

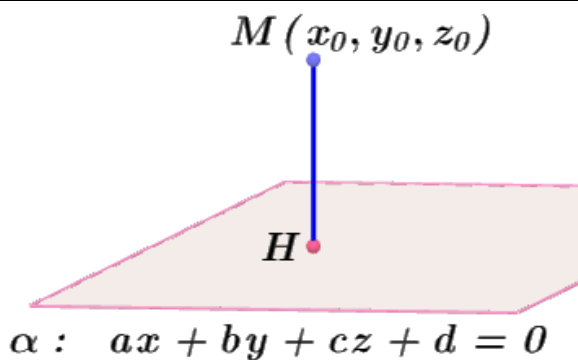
Вектор $\vec{n}(a, b, c)$ – это вектор, перпендикулярный плоскости α . Его называют **вектор нормали**, или **нормальный вектор**, или **нормаль**. Очевидно, что нормалью является любой вектор, коллинеарный вектору $\vec{n}$ (рис. 13).

$$\left. \begin{array}{l} M_0, M \in \alpha \\ \overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ \vec{n}(a, b, c) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ax + by + cz + d = 0.$$

1.8 Формулы для решения простейших задач на сферу и плоскость

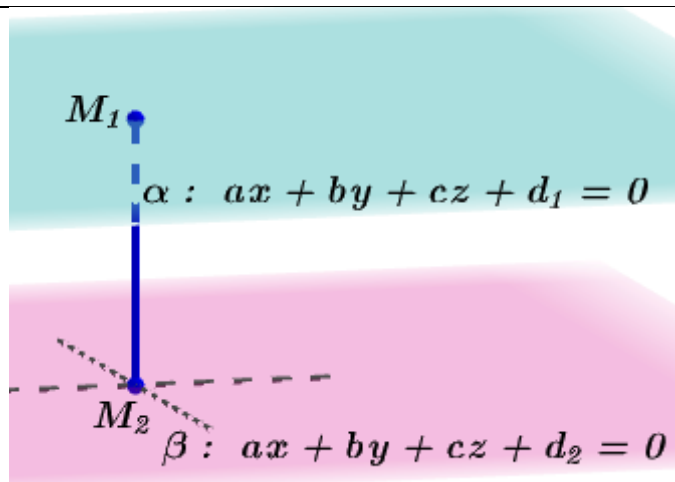
Угол между пересекающимися прямыми	
	$\cos(\widehat{\ell, m}) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$ $= \left \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \right $
Уравнение плоскости	
	$ax + by + cz + d = 0$ $\vec{n}(a, b, c)$

Формула расстояния от точки до плоскости



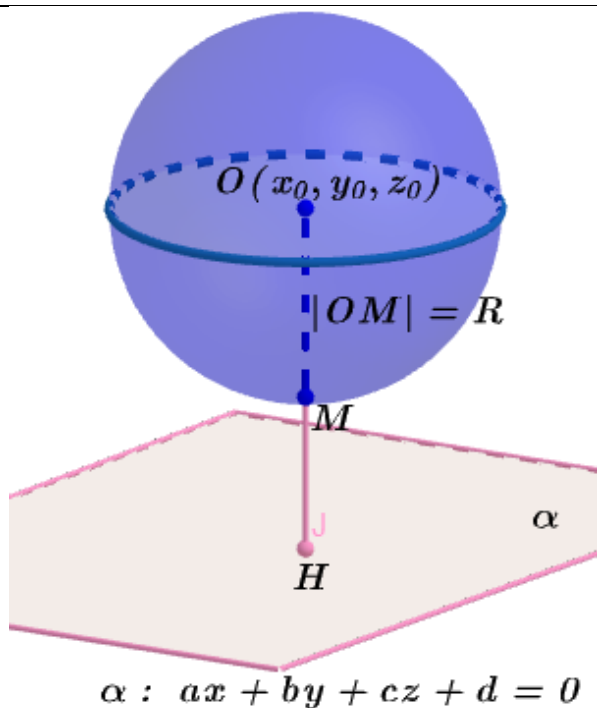
$$|MH| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Формула расстояния между двумя параллельными плоскостями



$$|M_1M_2| = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Взаимное расположение сферы и плоскости

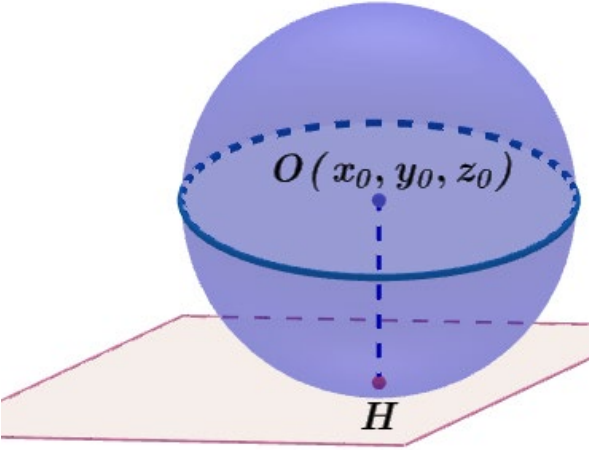
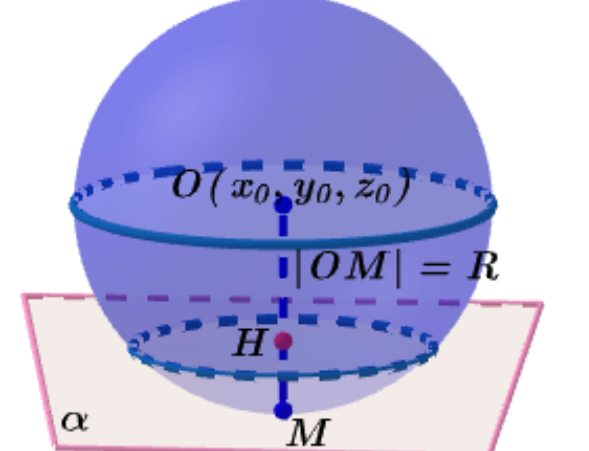


Сфера и плоскость не пересекаются

$$|OH| > R$$

или

$$|OH| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} > R$$

 $\alpha : ax + by + cz + d = 0$	Сфера касается плоскости $ OH = R$ или $ OH = \frac{ ax_0 + by_0 + cz_0 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = R$
 $\alpha : ax + by + cz + d = 0$	Сфера и плоскость пересекаются $ OH < R$ или $ OH = \frac{ ax_0 + by_0 + cz_0 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < R$

1.9 Примеры решения задач

Пример 1. Зная координаты точек $A(-5;-3;-2)$, $B(3;0;-6)$, $C(1;-4;-3)$, вычислите значение выражения $|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2$.

Решение. Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками:

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A(-5;-3;-2), B(3;0;-6) \Rightarrow |AB| = \sqrt{(3 + 5)^2 + (0 + 3)^2 + (-6 + 2)^2} = \sqrt{89}$$

$$B(3;0;-6), C(1;-4;-3) \Rightarrow |BC| = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-4 - 0)^2 + (-3 + 6)^2} = \sqrt{29}$$

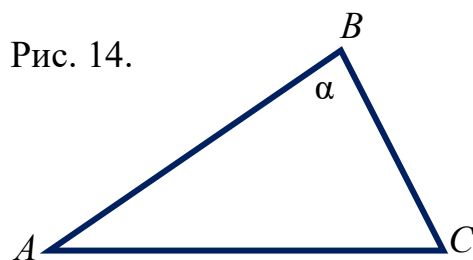
$$A(-5;-3;-2), \quad C(1;-4;-3) \quad \Rightarrow \quad |AC| = \sqrt{(1+5)^2 + (-4+3)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{38}$$

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2 = 89 + 29 + 38 = 157$$

Ответ. 157.

Пример 2. Точки $A(-5;-3;-2)$, $B(3;0;-6)$, $C(1;-4;-3)$ – вершины треугольника ABC. Вычислите площадь треугольника ABC.

Решение. Воспользуемся формулой площади $S = \frac{a \cdot b}{2} \sin(\alpha)$ для треугольника ABC (рис. 14).



$$S = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} \sin(\alpha)$$

Из примера 1 имеем:

$$|AB| = \sqrt{89}, \quad |BC| = \sqrt{29}, \quad |AC| = \sqrt{38}.$$

$\sin(\alpha)$ можно найти двумя способами.

Первый способ с помощью теоремы косинусов и основного тригонометрического тождества.

$$\begin{aligned} T_{\cos}: AC^2 &= AB^2 + CB^2 - 2 \cdot AB \cdot CB \cdot \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) &= \frac{AB^2 + CB^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot CB} = \frac{89 + 29 - 38}{2 \cdot \sqrt{89} \cdot \sqrt{29}} = \frac{80}{2 \cdot \sqrt{89} \cdot \sqrt{29}} = \frac{40}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{29}} \\ \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 \Rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{40}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{981}{89 \cdot 29}} \\ &= 3 \cdot \sqrt{\frac{109}{89 \cdot 29}}. \end{aligned}$$

Второй способ с помощью скалярного произведения векторов и основного тригонометрического тождества.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$$

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$A(-5;-3;-2), \quad B(3;0;-6) \Rightarrow \overrightarrow{BA}(-5-3; -3-0; -2+6) \Rightarrow \overrightarrow{BA}(-8; -3; 4)$$

$$B(3;0;-6), C(1;-4;-3) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(1-3; -4-0; -3+6) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(-2; -4; 3)$$

Тогда с учётом формулы скалярного произведения найдём $\cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{(-8) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-4) + 4 \cdot 3}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{29}} = \frac{40}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{29}}$$

Из основного тригонометрического тождества получим $\sin(\alpha)$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{40}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{29}}\right)^2} = 3 \cdot \sqrt{\frac{109}{89 \cdot 29}}$$

Вычислим площадь треугольника ABC

$$S = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{89} \cdot \sqrt{29}}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{109}{89 \cdot 29}} = \frac{3\sqrt{109}}{2}.$$

Ответ. $S = \frac{3\sqrt{109}}{2}.$

Пример 3. Точки $A(-5;-3;-2)$, $B(3;0;-6)$, $C(1;-4;-3)$, $D(23; 0; -7)$ – вершины четырёхугольника ABCD. Вычислите его площадь.

Решение. Воспользуемся формулой площади $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin(\alpha)$ для четырёхугольника ABCD (рис. 15).

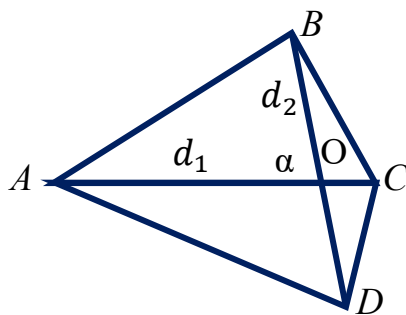


Рис. 15.

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin(\alpha) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} \sin(\alpha).$$

Используя формулу расстояния между двумя точками, найдём длины диагоналей ABCD.

$$B(3; 0; -6), D(23; 0; -7) \Rightarrow$$

$$|BD| =$$

$$\sqrt{(23-3)^2 + (0-0)^2 + (-7+6)^2} = \sqrt{401};$$

$$|AC| = \sqrt{38} \text{ (см. пример 1).}$$

Вычислим угол между диагоналями с помощью формулы скалярного произведения векторов. С учётом коллинеарности векторов $\overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DB} \parallel \overrightarrow{OB}$

получим

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{DB}|}.$$

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$.

$$A(-5; -3; -2), C(1; -4; -3) \Rightarrow \overrightarrow{CA}(-5 - 1; -3 + 4; -2 + 3) \Rightarrow \overrightarrow{CA}(-6; -1; 1)$$

$$B(3; 0; -6), D(23; 0; -7) \Rightarrow \overrightarrow{DB}(3 - 23; 0 - 0; -6 + 7) \Rightarrow \overrightarrow{DB}(-20; 0; 1).$$

Тогда с учётом формулы скалярного произведения векторов найдём

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{DB}|} = \frac{(-6) \cdot (-20) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{29}} = \frac{121}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{401}}.$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{121}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{401}}\right)^2} = \sqrt{\frac{597}{38 \cdot 401}}$$

Вычислим площадь четырёхугольника ABCD

$$S = \frac{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{DB}|}{2} \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{38} \cdot \sqrt{401}}{2} \cdot \sqrt{\frac{597}{38 \cdot 401}} = \frac{\sqrt{597}}{2}.$$

Ответ. $S = \frac{\sqrt{597}}{2}$.

Пример 4 (демонстрационный вариант). Площадь плоского четырёхугольника ABCD, заданного координатами своих вершин

$$A(2; -3; 6), B(-4; 5; 6), C(-1; 1; 1), D(2; -3; 1),$$

равна

- 1) 37,5 2) 12,5 3) 50 4) 25

Решение (рис. 16).

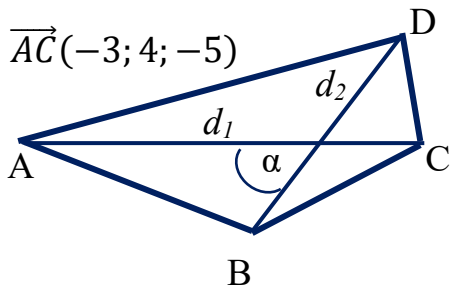


Рис. 16.

$$\overrightarrow{AC} = (-1 - 2; 1 + 3; 1 - 6) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{DB} = (-4 - 2; 5 + 3; 6 - 1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DB}(-6; 8; 5).$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50};$$

$$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{36 + 64 + 25} = 125.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{DB}|} = \frac{18 + 32 - 25}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{125}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$S = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{DB}|}{2} \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{125}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{74}{2} = 37,5.$$

Ответ. 1.

Пример 5. Определите расстояние от точки $A(2; -3; -6)$ до плоскости α , заданной уравнением $3x - 2y + z - 10 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости (рис. 17):

$$|AO| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \text{ где}$$

$x_0 = 2, y_0 = -3, z_0 = -6$ – координаты точки A ;

$a = 3, b = -2, c = 1, d = -10$ – коэффициенты в уравнении плоскости α .

Тогда расстояние от точки A до заданной плоскости α будет равно

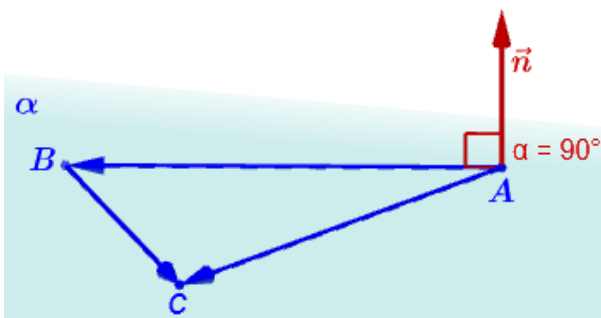
$$|AO| = \frac{|3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-6) - 10|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Ответ. $\frac{4}{\sqrt{14}}$.

Пример 6. Найдите уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(2; -3; 6)$, $B(-4; 5; 6)$, $C(-1; 1; 1)$.

Решение. Пусть $\vec{n}(a, b, c)$ вектор нормали плоскости α (рис. 18). По условию

задачи точки A, B, C принадлежат плоскости α , и следовательно векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ортогональны вектору $\vec{n}$, то есть их скалярное произведение попарно равно 0



$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (-6; 8; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-3; 4; -5)$.

Скалярное произведение векторов в координатной форме примет вид

$$\begin{cases} -6 \cdot a + 8b = 0 \\ -3a + 4b - 5c = 0 \end{cases}$$

Система содержит два уравнения и три переменных. Для её решения выразим любые две переменные через третью, например, a и c через b

$$\begin{cases} -6 \cdot a + 8b = 0 \\ -3a + 4b - 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4b}{3} \\ -3 \cdot \frac{4b}{3} + 4b - 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4b}{3} \\ c = 0 \end{cases}$$

Получили, что переменная b не зависит от остальных переменных системы, следовательно за b можно выбрать любое число, отличное от 0, например, $b = 3$. Итак, вектор нормали имеет координаты $\vec{n}(4; 3; 0)$. Заметим, что выбор любого ненулевого числа вместо переменной b справедлив, так как векторов нормали плоскости существует бесконечное множество, мы выбрали лишь один из них (рис. 19).

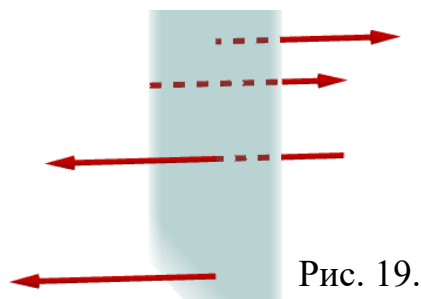


Рис. 19.

Зная координаты вектора нормали, запишем уравнение плоскости α

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \vec{n}(a, b, c)$$

$$\vec{n}(4, 3, 0) \Rightarrow 4x + 3y + 0z + d = 0 \Rightarrow \alpha: 4x + 3y + d = 0.$$

Найдём коэффициент d . Точка $A(2; -3; 6)$ принадлежит плоскости α , значит её координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости

$$A \in \alpha \Rightarrow 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + d = 0 \Rightarrow d = 1.$$

Следовательно, уравнение плоскости α будет иметь вид

$$\alpha: 4x + 3y + 1 = 0.$$

Ответ. $4x + 3y + 1 = 0$.

Пример 7 (демонстрационный вариант). Уравнение плоскости симметрии двух параллельных плоскостей

$$\alpha: 4x + 2y + 2z - 6 = 0, \quad \beta: 4x + 2y + 2z - 3 = 0$$

имеет вид

$$1) 8x + 4y + 4z - 9 = 0 \quad 2) 4x + 2y + 2z - 9 = 0$$

$$3) 8x + 4y + 4z + 9 = 0 \quad 4) 4x + 2y + 2z + 9 = 0$$

Решение. Искомая плоскость γ параллельна данным плоскостям α и β (рис. 20),

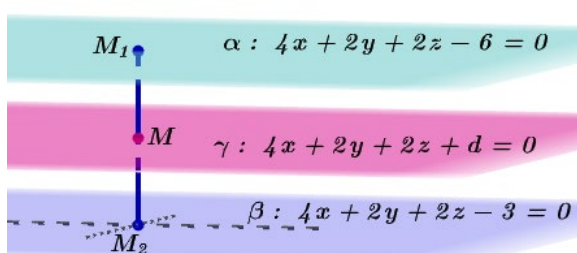


Рис. 20.

следовательно её уравнение имеет вид

$$4x + 2y + 2z + d = 0.$$

Для нахождения коэффициента d необходимо найти координаты какой-нибудь точки, принадлежащей плоскости

γ .

Заметим, по условию задачи γ является плоскостью симметрии для плоскостей α и β , следовательно $M_1M = MM_2$, если $M_1M_2 \perp \alpha, M \in M_1M_2$ (рис. 20).

Выберем координаты точки M_1 . Из того, что $M_1 \in \alpha$, её координаты удовлетворяют уравнению плоскости α : $4x + 2y + 2z - 6 = 0$. Пусть $x = y = 0$, тогда $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2z - 6 = 0 \Rightarrow z = 3$. Итак, координаты $M_1(0; 0; 3)$.

Определим теперь координаты точки $M_2 \in \beta$. Обозначим их $M_2(x_0, y_0, z_0)$. Из параллельности всех трёх плоскостей α , β и γ следует, что вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарен вектору нормали $\vec{n}(4; 2; 2)$ этих плоскостей, то есть

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{n} \\ \vec{n}(4; 2; 2) \\ \overrightarrow{M_1M_2}(x_0, y_0, z_0 - 3) \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0}{4} = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0 - 3}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{2} = y_0 = z_0 - 3 = t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = 2t \\ y_0 = t \\ z_0 = t + 3 \end{cases} \Rightarrow M_2(2t, t, t + 3) \in \beta \Rightarrow 4 \cdot 2t + 2t + 2(t + 3) - 3 = 0 \Rightarrow t$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

Итак, координаты $M_2 \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{11}{4} \right)$.

Зная координаты $M_1(0; 0; 3)$ и $M_2 \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{11}{4} \right)$, определим координаты середины отрезка $M \left(\frac{0 + \left(-\frac{1}{2} \right)}{2}; \frac{0 + \left(-\frac{1}{4} \right)}{2}; \frac{3 + \frac{11}{4}}{2} \right) = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{23}{8} \right)$.

Теперь мы готовы записать уравнение плоскости γ .

$$M \in \gamma \Rightarrow 4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{8} \right) + 2 \cdot \left(\frac{23}{8} \right) + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{9}{2}.$$

Уравнение плоскости γ имеет вид $4 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z - \frac{9}{2} = 0$ или

$$8x + 4y + 4z - 9 = 0.$$

Ответ. 1

Пример 8. Для каждой из данных сфер укажите центр и радиус.

$$1) x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0, \quad 2) x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 3y - 6z + \frac{9}{4} = 0.$$

Решение. 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. Выделим полный квадрат относительно каждой переменной

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + z^2 - 3 = 0$$

$$(x^2 - 2 \cdot 2x) + (y^2 + 2 \cdot 3y) + z^2 - 3 = 0$$

$$(x^2 - 2 \cdot 2x + 4) - 4 + (y^2 + 2 \cdot 3y + 9) - 9 + z^2 - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 4^2$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Центр окружности в точке с координатами $(2; -3; 0)$, радиус равен 4.

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 3y - 6z + \frac{9}{4} = 0$. Выделим полный квадрат относительно каждой переменной

$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 3y) + (z^2 - 6z)^2 + \frac{9}{4} = 0$$

$$(x^2 - 2 \cdot 4x) + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y \right) + (z^2 - 6z) + \frac{9}{4} = 0$$

$$(x^2 - 2 \cdot 4x + 16) - 16 + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + (z^2 - 2 \cdot 3z + 9) - 9 + \frac{9}{4} = 0$$

$$(x - 4)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 3)^2 = 5^2$$

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ y + \frac{3}{2} = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

Центр окружности в точке с координатами $\left(4; -\frac{3}{2}; 3\right)$, радиус равен 5.

Ответ. 1) Центр $(2; -3; 0)$, радиус равен 4.

2) Центр $\left(4; -\frac{3}{2}; 3\right)$, радиус равен 5.

Пример 9. Выясните расположение сферы $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 4^2$ и плоскости $2x + 3y - \sqrt{3}z = 1$.

Решение. Найдём расстояние d от центра O сферы до плоскости и сравним с

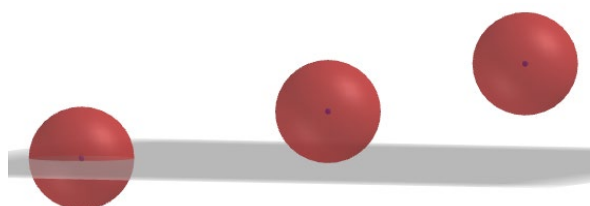


Рис. 21.

радиусом сферы r (рис. 21). Координаты центра заданной сферы $O(2; -3; 0)$, радиус $r = 4$. По формуле расстояния от точки до плоскости вычислим d

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) - \sqrt{3} \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Сравнивая расстояние d с радиусом сферы r $\frac{3}{2} < 4 \Rightarrow d < r$,

получим, что сфера и плоскость пересекаются.

Ответ. Сфера и плоскость пересекаются.

Пример 10 (демонстрационный вариант).

Даны уравнения двух сфер:

$$(x+7)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1 \text{ и } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$$

Требуется выбрать из предложенных ниже четырех сфер

1) $(x+3)^2 + y^2 + (z-3,5)^2 = 12,25$

2) $(x-3)^2 + y^2 + (z+3,5)^2 = 49$

$$3) (x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-0,5)^2 = 20,25 \quad 4) (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+0,5)^2 = 81$$

ту, центр которой лежит на прямой, соединяющей центры двух данных сфер, и, которая касается обеих данных сфер. Запишите в ответе порядковый номер соответствующего уравнения.

Решение. Выпишем центры и радиусы данных окружностей.

$$(x+7)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1 \quad (-7; -2; 4) - \text{центр}, \quad r_1 = 1.$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1 \quad (1; 2; 3) - \text{центр}, \quad r_2 = 1.$$

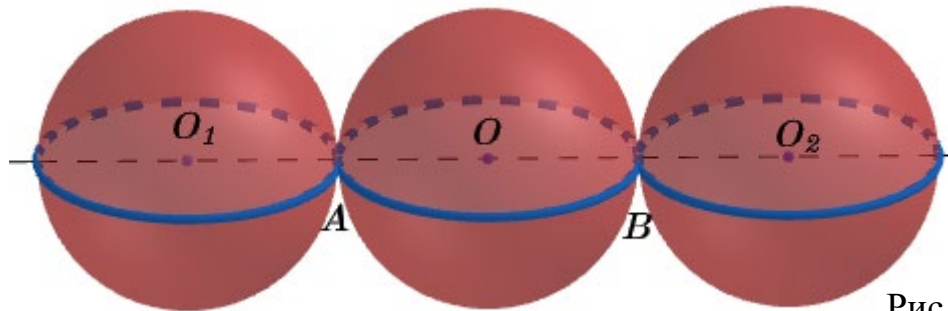


Рис. 22.

Вычислим расстояние между центрами данных сфер

$$O_1(-7; -2; 4), \quad O_2(1; 2; 3) \rightarrow O_1O_2 = \sqrt{64 + 16 + 1} = 9 \rightarrow O_1O_2 > r_1 + r_2 = 2.$$

Следовательно данные сферы не пересекаются. На рисунке 22 это сферы с центрами O_1 и O_2 . Найдём радиус и центр искомой сферы.

$$\text{Вычислим диаметр: } d = AB = O_1O_2 - (r_1 + r_2) = 9 - (1 + 1) = 7,$$

$$\text{тогда радиус сферы будет равен } r = \frac{d}{2} = 3,5.$$

$$\text{Центр: } O_1O = OO_2 \rightarrow O\left(\frac{-7+1}{2}; \frac{-2+2}{2}; \frac{4+3}{2}\right) = (-3; 0; 3,5).$$

Итак, уравнение третьей сферы имеет вид $(x+3)^2 + y^2 + (z-3,5)^2 = 12,25$.

Ответ. 1.

2. Определения и свойства чётных и нечётных функций.

2.1. Определение чётной функции.

Функция $y = f(x), x \in D(x)$, называется **чётной**, если для любого значения x из области определения $D(x)$ выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$.

Например,

$$1. y = x^2 - \text{чётная функция, так как } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

2. $y = x^6 - 3x^4 + 5$ – чётная функция, так как

$$f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^4 + 5 = x^6 - 3x^4 + 5 = f(x).$$

3. $y = \frac{3}{x^2}$ – чётная функция, так как $f(-x) = \frac{3}{(-x)^2} = \frac{3}{x^2} = f(x)$.

4. $y = \cos(x)$ – чётная функция, так как $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$.

Определение чётной функции равносильно двум условиям:

1) область определения чётной функции симметрична относительно нуля.

В самом деле, $\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ x \in D(x) \end{cases} \Leftrightarrow (-x) \in D(x) \text{ (рис. 23).}$

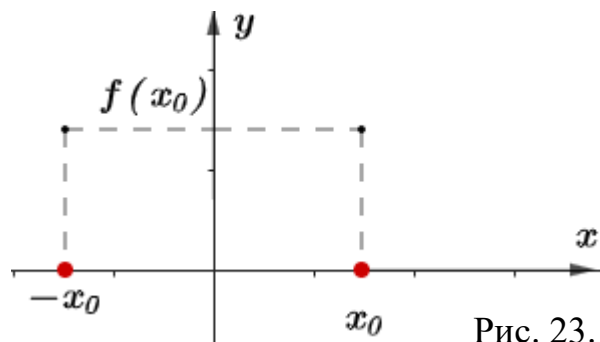


Рис. 23.

2) график чётной функции симметричен относительно оси **OY** (рис. 24).

Справедливость следует из первого условия и определения чётности функции $f(-x) = f(x)$.

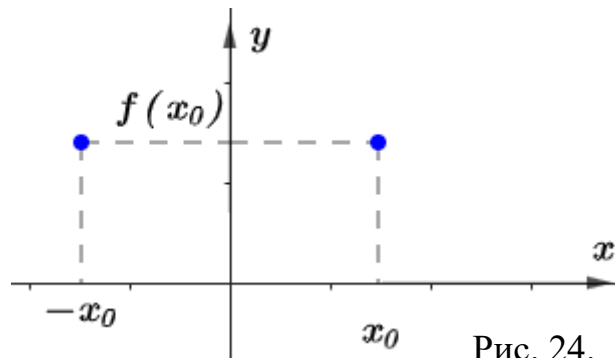


Рис. 24.

Согласно выше сказанному получим, что график чётной функции можно построить на интервале $[0; +\infty)$, а затем его симметрично отобразить относительно оси ординат (рис. 25).

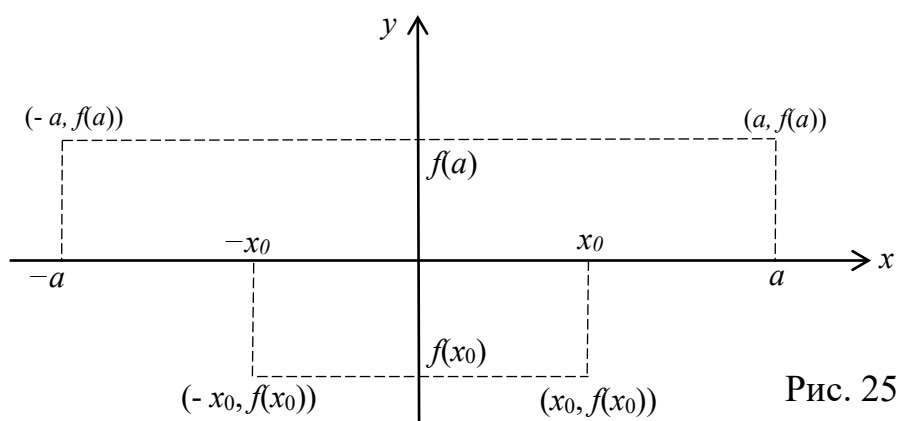


Рис. 25.

Построим графики чётных функций, приведённых в примерах выше, и заметим, что все они симметричны относительно оси ординат (рис. 26).

1. $y = x^2$ (рис. 26 а).

2. $y = x^6 - 3x^4 + 5$ (рис. 26 б).

3. $y = \frac{3}{x^2}$ (рис. 26 в).

4. $y = \cos(x)$ (рис. 26 г).

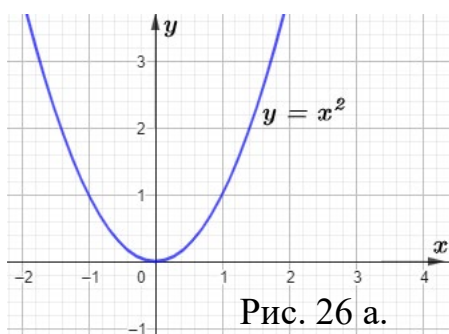


Рис. 26 а.

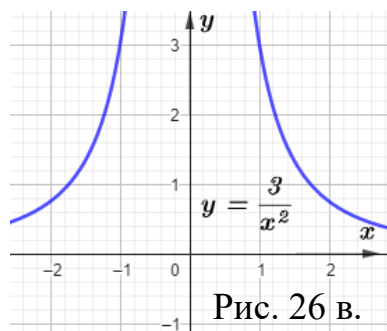


Рис. 26 в.

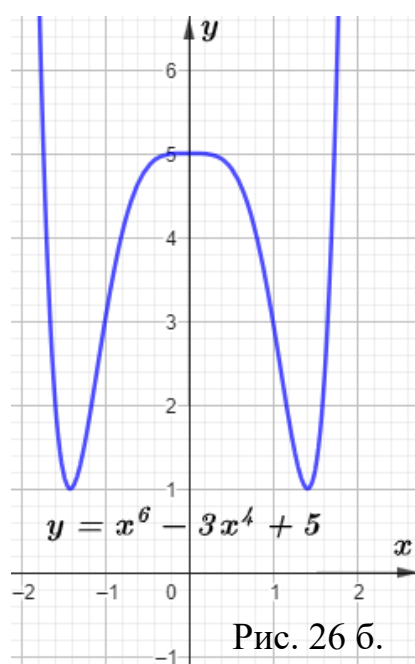


Рис. 26 б.

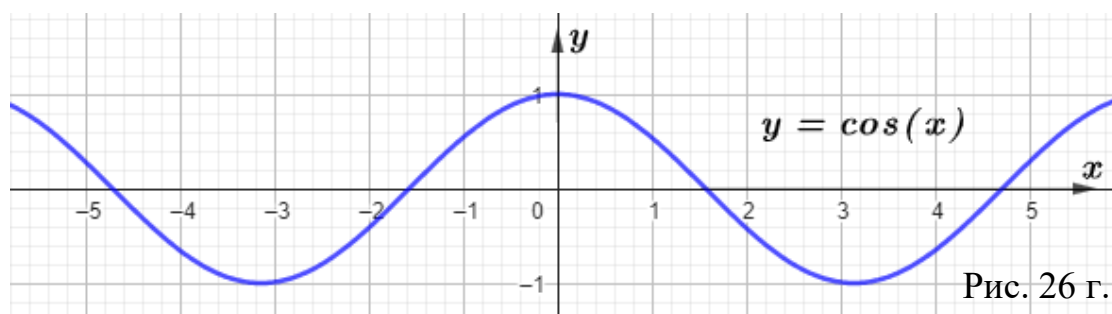


Рис. 26 г.

2.2. Определение нечётной функции

Функция $y = f(x), x \in D(x)$, называется **нечётной**, если для любого значения x из области определения $D(x)$ выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$.

Например,

1. $y = x^3$ – нечётная функция, так как $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

2. $y = x^3 - 4x$ – нечётная функция, так как

$$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x).$$

3. $y = \frac{3}{x}$ – нечётная функция, так как $f(-x) = \frac{3}{(-x)} = -\frac{3}{x} = -f(x)$.

4. $y = \sin(x)$ – нечётная функция, так как $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$.

Определение нечётной функции равносильно двум условиям:

1) область определения нечётной функции симметрична относительно нуля.

В самом деле, $\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ x \in D(x) \end{cases} \Leftrightarrow (-x) \in D(x)$ (рис. 27).

2) график нечётной функции симметричен относительно начала координат (рис. 28).

Справедливость следует из первого условия и определения нечётности функции $f(-x) = -f(x)$.

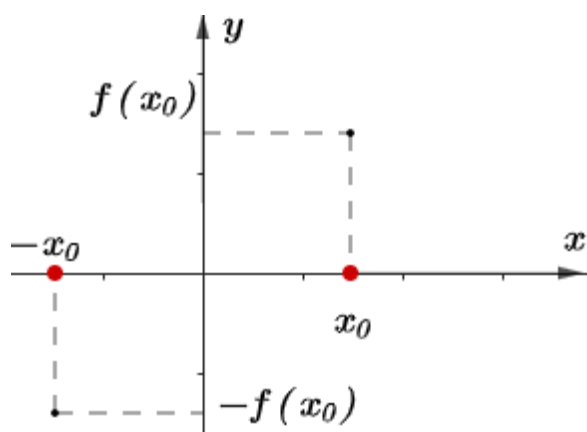
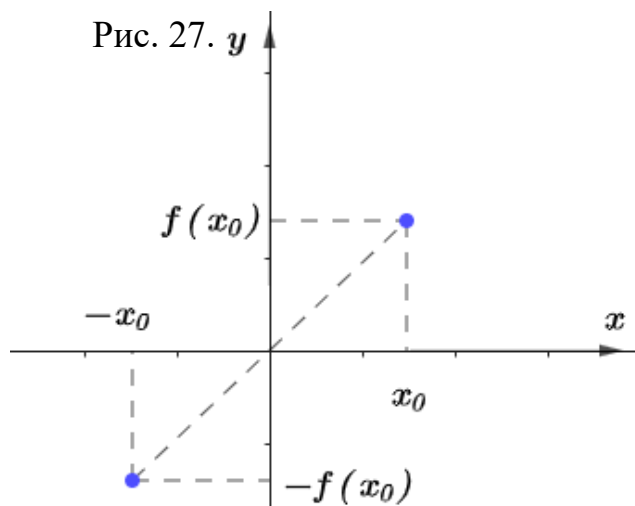


Рис. 27.

Рис. 28.



Согласно двум условиям выше график нечётной функции можно построить на интервале $[0; +\infty)$, а затем его симметрично отобразить относительно начала координат (рис. 29).

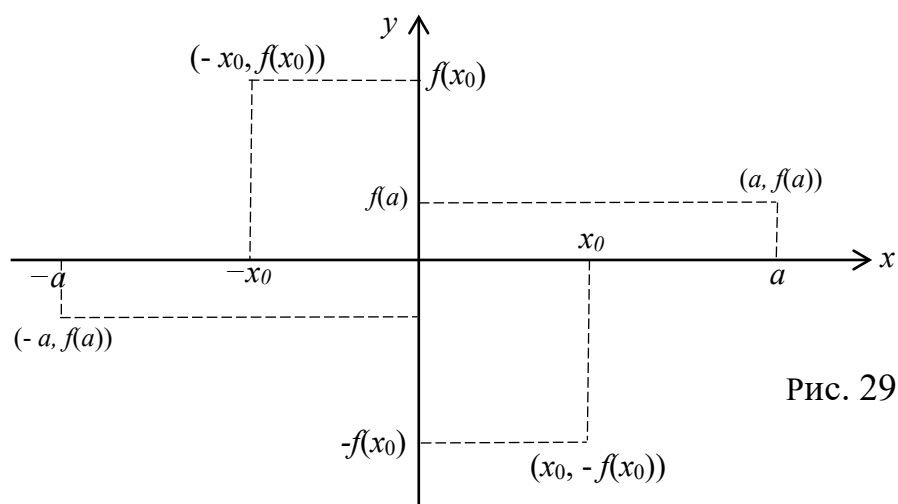


Рис. 29.

Построим графики чётных функций, приведённых в примерах выше, и заметим, что все они симметричны относительно начала координат (рис. 30).

1. $y = x^3$ (рис. 30 а).

2. $y = x^3 - 4x$ (рис. 30 б).

3. $y = \frac{3}{x}$ (рис. 30 в).

4. $y = \sin(x)$ (рис. 30 г).

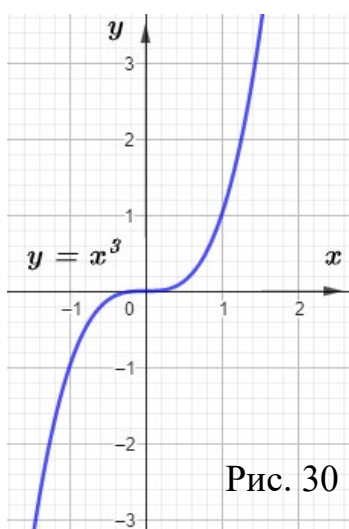


Рис. 30 а.

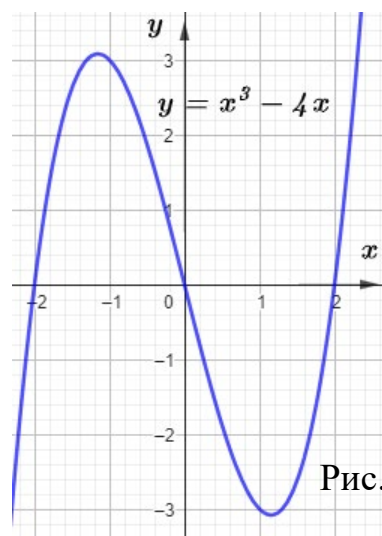


Рис. 30 б.

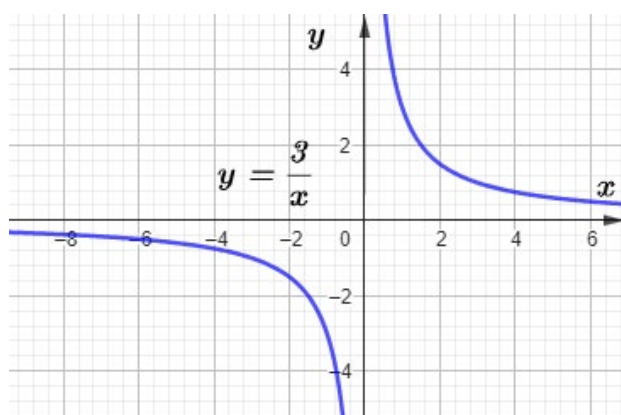


Рис. 30 в.

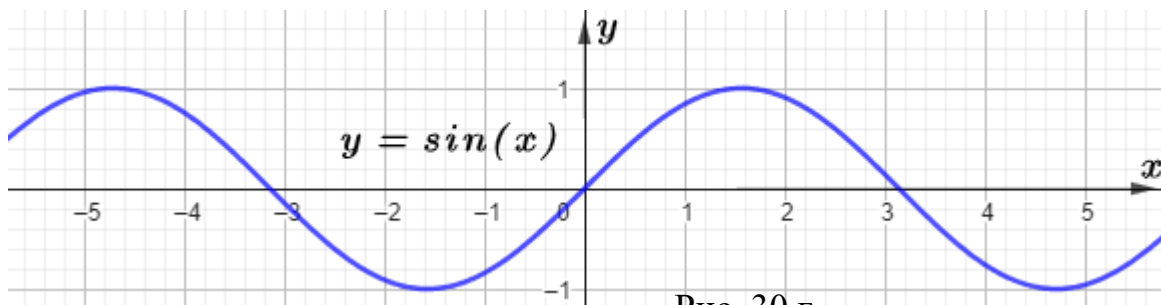


Рис. 30 г.

2.3. Свойства чётных и нечётных функций

1) Если функция $y = f(x)$ – чётная (нечётная), то функция $y = k \cdot f(x)$, $k \in \mathbb{R}$, также чётная (нечётная) функция.

В самом деле,

пусть $y = f(x)$ – чётная функция

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow y(-x) = k \cdot f(-x) = k \cdot f(x) = y(x);$$

пусть $y = f(x)$ – нечётная функция

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow y(-x) = k \cdot f(-x) = -k \cdot f(x) = -y(x). \blacksquare$$

Например, $y = x^2$ – чётная функция, тогда и $y = 3 \cdot x^2$, $y = -0,5 \cdot x^2$ – чётные функции.

2) Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – чётные (нечётные), то функция

$y = f(x) \pm g(x)$ также чётная (нечётная) функция.

В самом деле, пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – чётные функции

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ g(-x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow y(-x) = f(-x) \pm g(-x) = f(x) \pm g(x) = y(x).$$

пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – нечётные функции

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{cases} &\Rightarrow y(-x) = f(-x) \pm g(-x) = -f(x) \pm (-g(x)) = \\ &= -(f(x) \pm g(x)) = -y(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Например,

$y = x^2$ и $y = \cos(x)$ – чётные функции, тогда функции $y = x^2 + \cos(x)$ и $y = x^2 - \cos(x)$ – чётные функции;

$y = x^3$ и $y = \sin(x)$ – нечётные функции, тогда функции $y = x^3 + \sin(x)$ и $y = x^3 - \sin(x)$ – нечётные функции.

3) Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – чётные (нечётные), то функция $y = f(x) \cdot g(x)$ чётная функция.

В самом деле, пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – чётные функции

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ g(-x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow y(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = y(x).$$

пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – нечётные функции

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{cases} \Rightarrow y(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot (-g(x)) = \\ = f(x) \cdot g(x) = y(x). \blacksquare$$

Например,

$y = x^2$ и $y = \cos(x)$ – чётные функции, тогда функции $y = x^2 \cdot \cos(x)$ – чётная функция;

$y = x^3$ и $y = \sin(x)$ – нечётные функции, тогда функции $y = x^3 \cdot \sin(x)$ – чётная функция.

4) Если функции $y = f(x)$ – чётная, $y = g(x)$ – нечётная, то функция $y = f(x) \cdot g(x)$ нечётная функция.

В самом деле,

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{cases} \Rightarrow y(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -y(x). \blacksquare$$

Например,

$y = x^2$ – чётная и $y = \sin(x)$ – нечётная функции, тогда функции $y = x^2 \cdot \sin(x)$ – нечётная функция.

5) Если $y = f(x)$ — чётная функция, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень тогда и только когда, когда $x = 0$.

6) Если $y = f(x)$ — чётная или нечётная функция, и уравнение $f(x) = 0$ имеет корень $x_0 \neq 0$, то это уравнение обязательно будет иметь второй корень $-x_0$.

2.4. Чётность и нечётность некоторых элементарных функций

1. Степенная функция.

$$y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

а) $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow y(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k} = ((-x)^2)^k = x^{2k} = x^n = y(x)$

$y = x^n, n = 2k, k \in \mathbb{N}$ — чётная функция (рис. 31 а).

$$\begin{aligned} \text{б) } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow y(-x) &= (-x)^n = (-x)^{2k-1} = ((-x)^{2k})^{-1} = \frac{x^{2k}}{-x} = \\ &= -\frac{x^{2k}}{x} = -x^{2k-1} = -x^n = -y(x) \end{aligned}$$

$y = x^n, n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$ — нечётная функция (рис. 31 б).

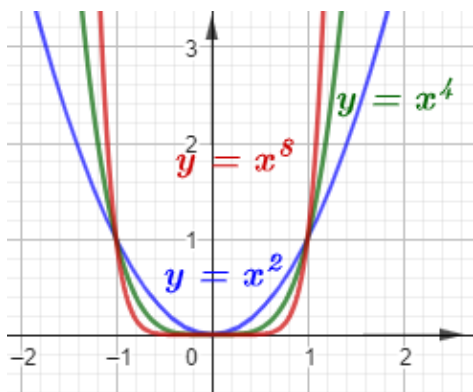


Рис. 31 а.

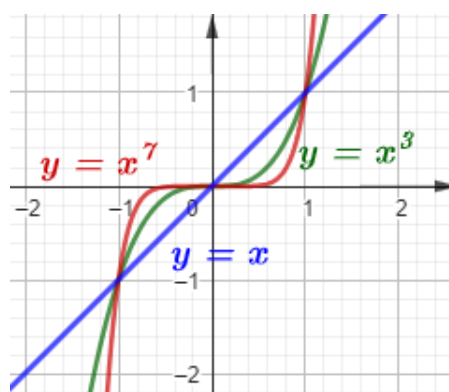


Рис. 31 б.

$$y = x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

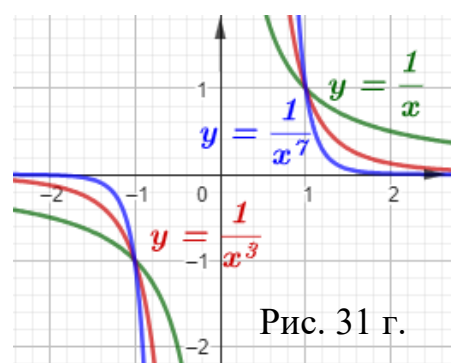
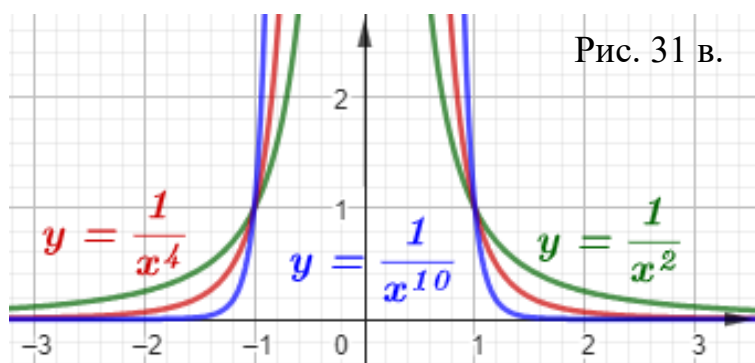
в) $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow y(-x) = (-x)^{-n} = (-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = \frac{1}{x^n} = x^{-n} = y(x)$

$y = x^{-n}, n = 2k, k \in \mathbb{N}$ — чётная функция (рис. 31 в).

г) $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow y(-x) = (-x)^{-n} = (-x)^{-(2k-1)} = (-x)^{-2k+1} =$

$$= (-x)^{-2k} \cdot (-x) = -\frac{x}{(-x)^{2k}} = -\frac{x}{x^{2k}} = -x^{-(2k-1)} = -x^{-n} = -y(x)$$

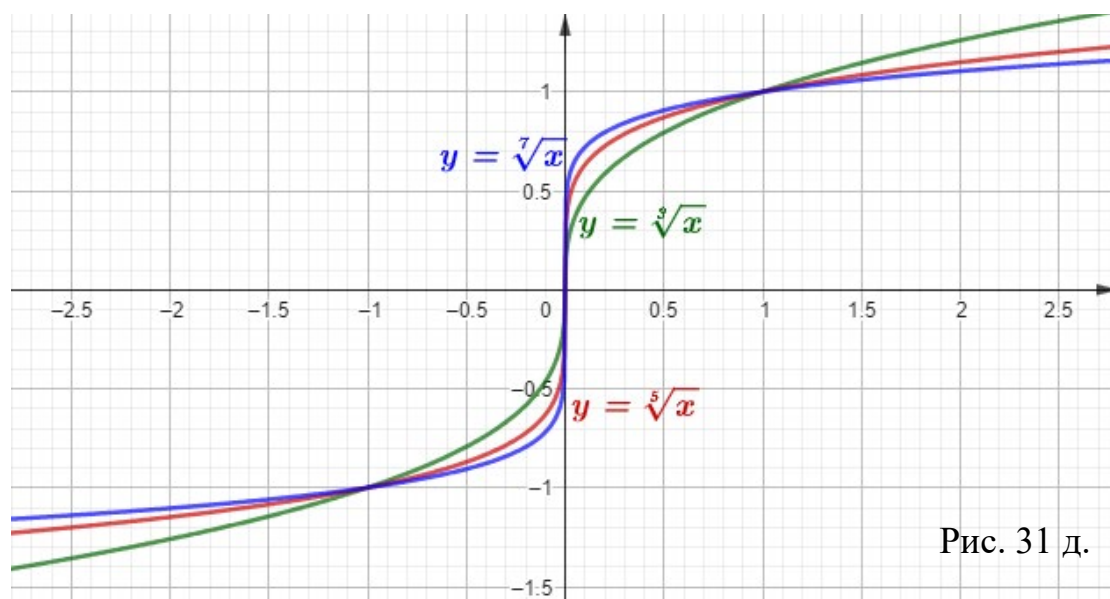
$y = x^{-n}, n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$ – нечётная функция (рис. 31 г).



$$y = \sqrt[n]{x}, \quad n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}.$$

в) $y(-x) = \sqrt[n]{-x} = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -\sqrt[n]{x} = -y(x)$

$y = \sqrt[n]{x}, n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ – нечётная функция (рис. 31 д).



2. Тригонометрические функции.

а) $y = \sin(x)$ – нечётная функция, так как

$$y(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -y(x) \text{ (рис. 32 а).}$$

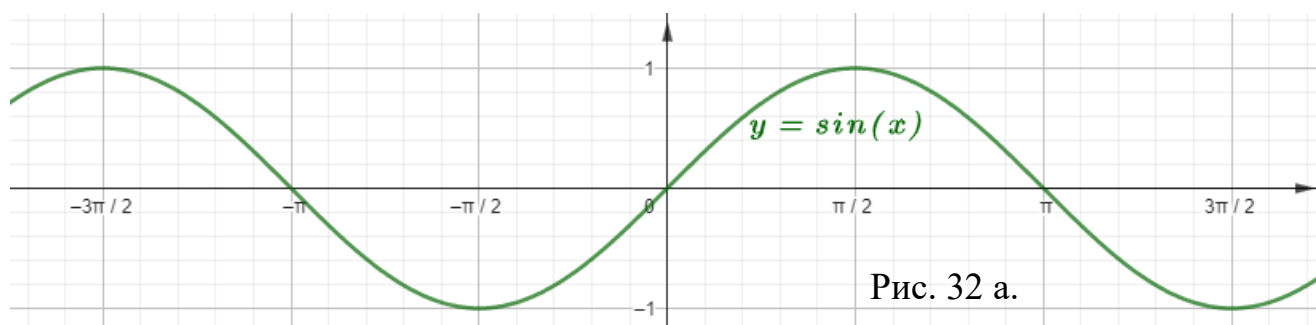


Рис. 32 а.

б) $y = \cos(x)$ – чётная функция, так как

$$y(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = y(x) \text{ (рис. 32 б).}$$

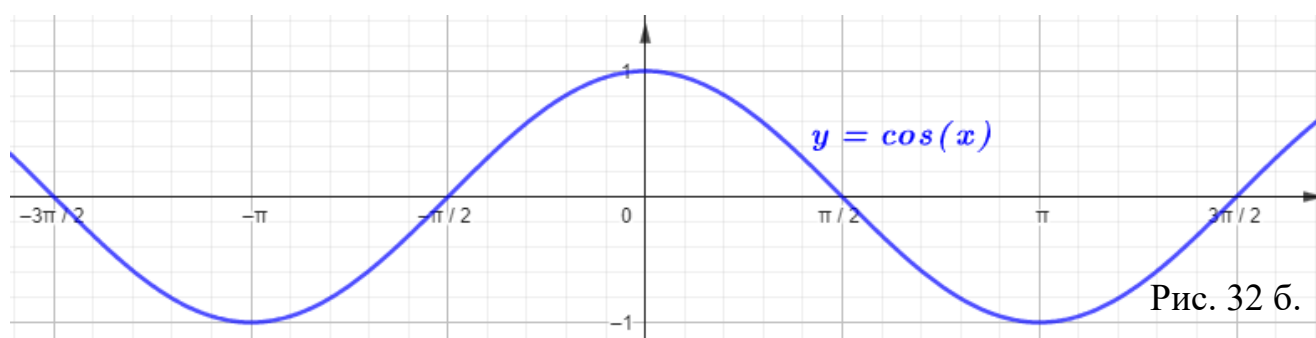


Рис. 32 б.

в) $y = \operatorname{tg}(x)$ – нечётная функция, так как

$$y(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x) = -y(x) \text{ (рис. 32 в).}$$

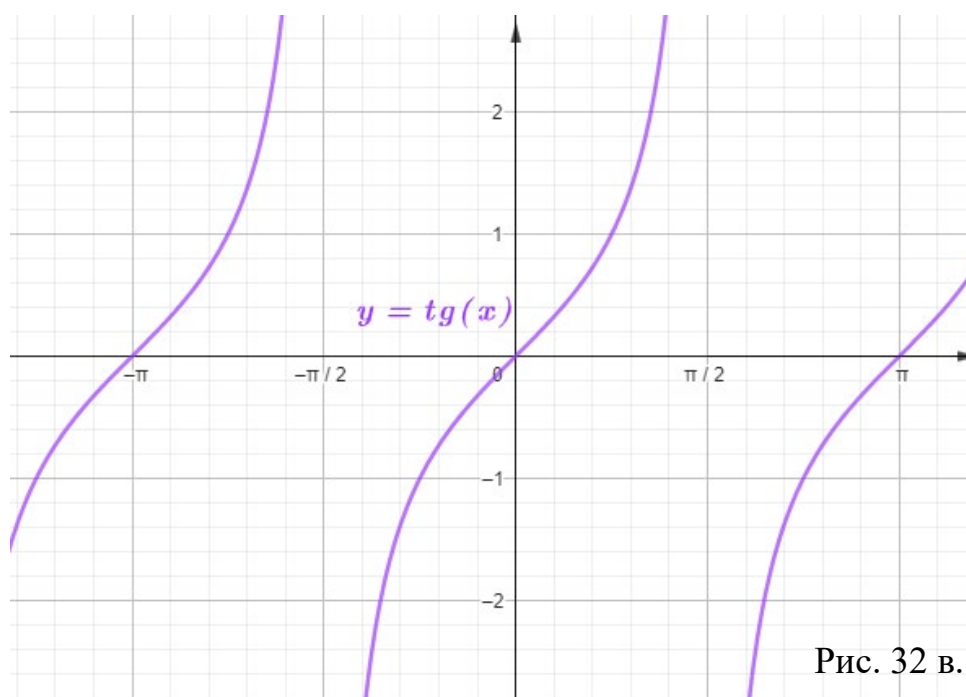


Рис. 32 в.

г) $y = \operatorname{ctg}(x)$ – нечётная функция, так как

$$y(-x) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x) = -y(x) \text{ (рис. 32 г).}$$

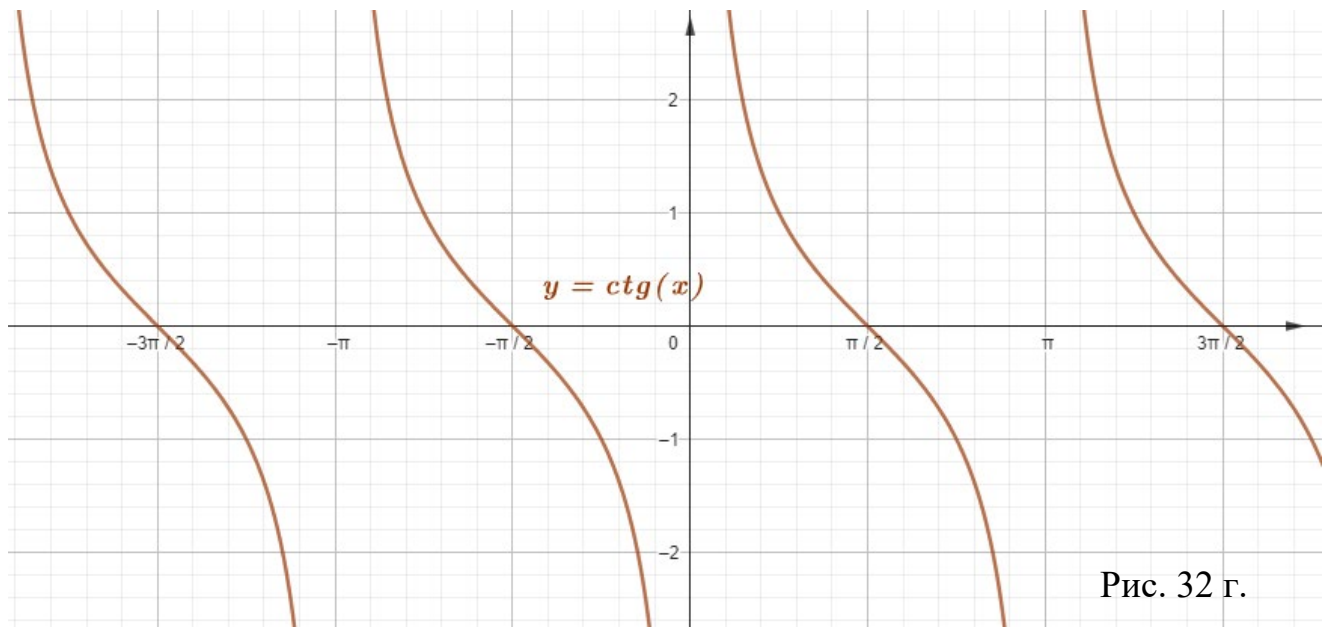


Рис. 32 г.

3. $y = |x|$ – чётная функция, так как

$$y(-x) = |-x| = |x| = y(x) \text{ (рис. 33).}$$

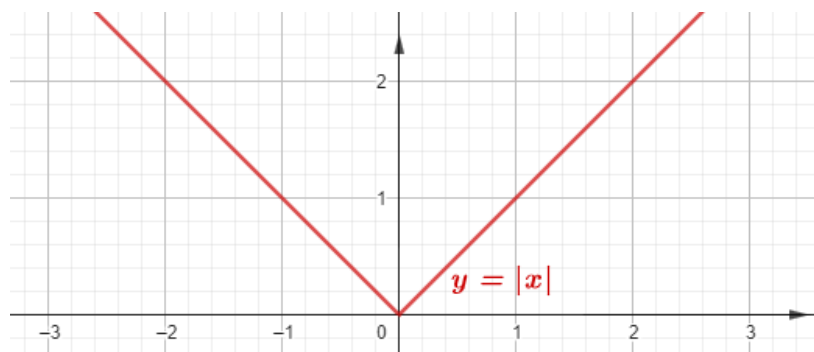


Рис. 33.

2.5. Примеры решения задач

Свойства чётности и нечётности функции значительно облегчают решение некоторых математических задач.

Пример 11. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[15]{x^2 - 2} = 0,5$.

Решение. Если решать уравнение аналитически, то обе части уравнения необходимо возвести в 15 степень, то есть

$$x^2 - 2 = \frac{1}{2^{15}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2^{15}} + 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + 2} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + 2} + \left(-\sqrt{\frac{1}{2^{15}} + 2}\right) = 0.$$

Однако если записать уравнение в виде ${}^{15}\sqrt{x^2 - 2} - 0,5 = 0$ и рассмотреть функцию $y = {}^{15}\sqrt{x^2 - 2} - 0,5$, то можно заметить, что она чётная. В самом деле,

$$y(-x) = {}^{15}\sqrt{(-x)^2 - 2} - 0,5 = {}^{15}\sqrt{x^2 - 2} - 0,5 = y(x).$$

Согласно свойству 6 чётности и нечётности функции: если $y = f(x)$ — чётная или нечётная функция, и уравнение $f(x) = 0$ имеет корень $x_0 \neq 0$, то это уравнение обязательно будет иметь второй корень $-x_0$, получим, что корни данного уравнения противоположные числа, сумма которых равна нулю.

Таким образом нет необходимости решать само уравнение. Приведём график функции $y = {}^{15}\sqrt{x^2 - 2} - 0,5$ для наглядности (рис. 34), который естественно не нужно строить при решении уравнения.

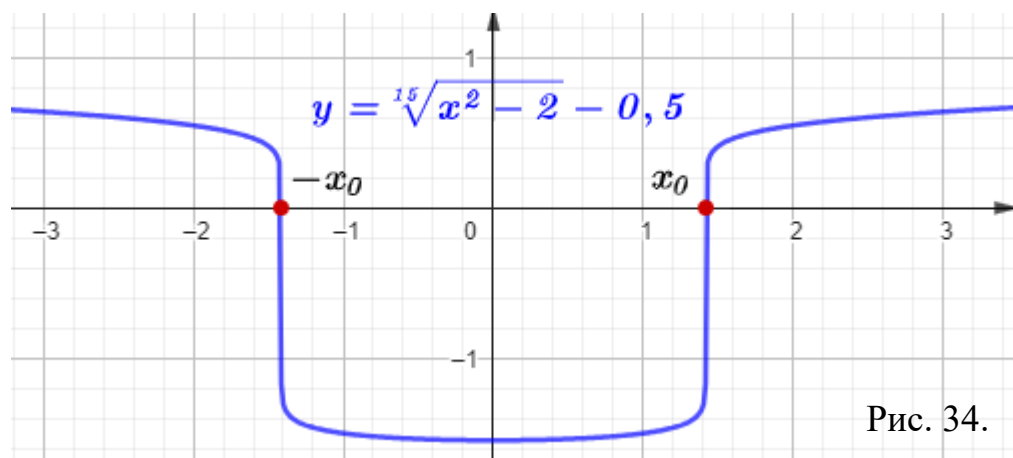


Рис. 34.

Ответ. 0.

Усложним уравнение.

Пример 12. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{x^2 - 2} - (x^2 - 2)^3 = 0,3$.

Решение. Если решать уравнение аналитически, то обе части уравнения необходимо возвести в 3 степень, то есть

$$\sqrt[3]{x^2 - 2} - (x^2 - 2)^3 = 0,3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - 2} = 0,3 + (x^2 - 2)^3 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2 = (0,3 + (x^2 - 2)^3)^3 \xrightarrow{t=x^2-2} t = (0,3 + t^3)^3 \Rightarrow \\ t^9 + 0,9t^6 + 0,27t^3 - t + 0,27 = 0.$$

Решать такое уравнение не очень хочется, но если записать уравнение в виде

$\sqrt[3]{x^2 - 2} - (x^2 - 2)^3 - 0,3 = 0$ и рассмотреть функцию

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 2} - (x^2 - 2)^3 - 0,3,$$

то легко видеть, что она чётная

$$y(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2 - 2} - ((-x)^2 - 2)^3 - 0,3 = \\ = \sqrt[3]{x^2 - 2} - (x^2 - 2)^3 - 0,3 = y(x).$$

Согласно свойству 6 чётности и нечётности функции сумма корней уравнения равна нулю.

Вновь только для наглядности приведём график функции (рис. 35)

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 2} - (x^2 - 2)^3 - 0,3$$

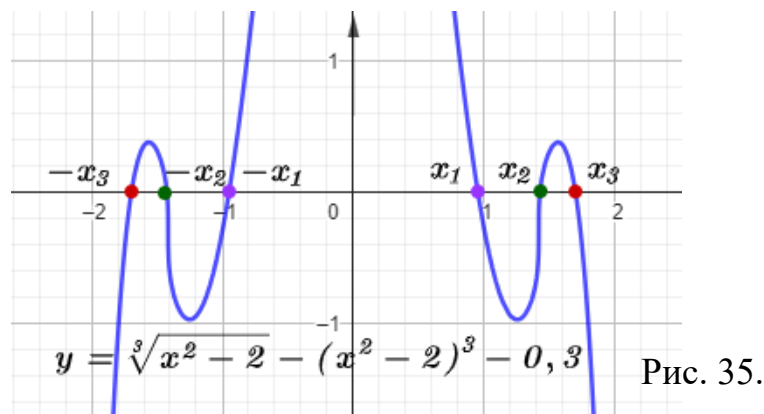


Рис. 35.

Ответ. 0.

Пример 13 (демонстрационный вариант).

Найдите сумму корней уравнения $(x^3 - 4x)^3 + \sin(x) = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y(x) = (x^3 - 4x)^3 + \sin(x)$ и проверим её на чётность или нечётность.

$$y(-x) = ((-x)^3 - 4(-x))^3 + \sin(-x) = (-x^3 + 4x)^3 - \sin(x) = \\ = -((x^3 - 4x)^3 + \sin(x)) = -y(x) - \text{функция нечётная.}$$

Согласно свойству 6 чётности и нечётности функции сумма корней уравнения равна нулю. Заметим, что $x = 0$ является корнем данного уравнения

$$y(0) = (0^3 - 4 \cdot 0)^3 + \sin(0) = 0,$$

но на ответ задачи это не повлияет.

Для наглядности приведём график функции (рис. 36)

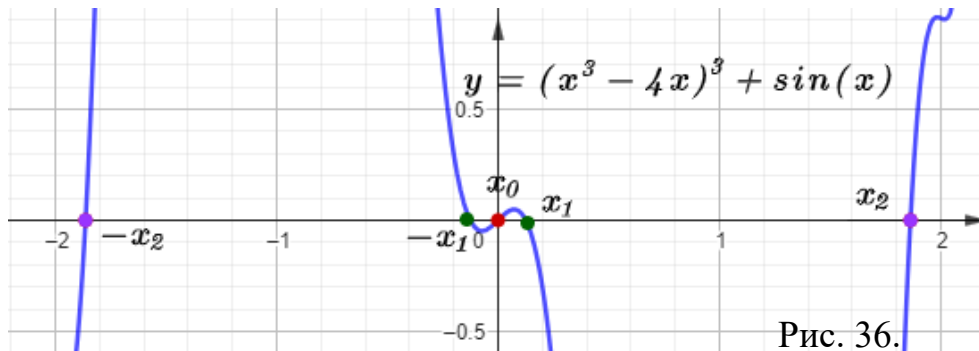


Рис. 36.

Ответ. 0.

Пример 14 (демонстрационный вариант).

Найдите сумму корней уравнения $\operatorname{tg}(\cos(x)) - x^4 = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y(x) = \operatorname{tg}(\cos(x)) - x^4$ и проверим её на чётность или нечётность.

$$y(-x) = \operatorname{tg}(\cos(-x)) - (-x)^4 = \operatorname{tg}(\cos(x)) - x^4 = y(x) - \text{функция чётная.}$$

Согласно свойству 6 чётности и нечётности функции сумма корней уравнения равна нулю.

Для наглядности приведём график функции (рис. 37)

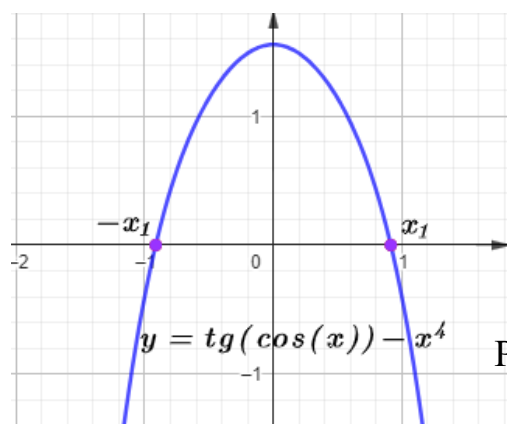


Рис. 37.

Ответ. 0.

Пример 15 (демонстрационный вариант).

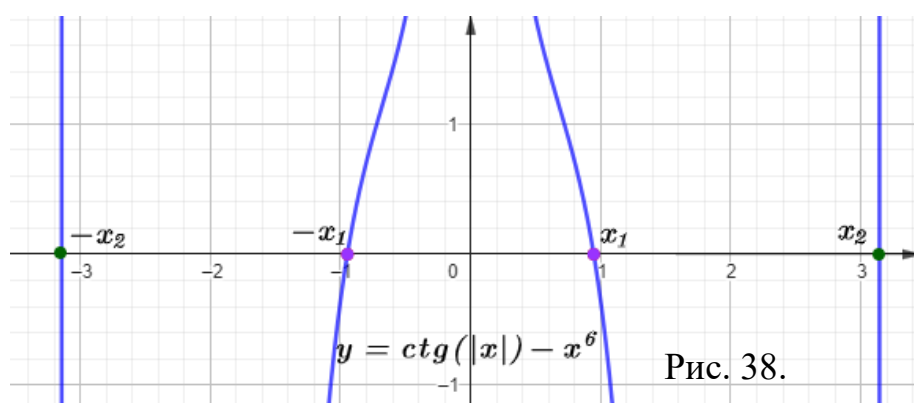
Найдите сумму корней уравнения $\operatorname{ctg}(|x|) - x^6 = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y(x) = \operatorname{ctg}(|x|) - x^6$ и проверим её на чётность или нечётность.

$$y(-x) = \operatorname{ctg}(|-x|) - (-x)^6 = \operatorname{ctg}(|x|) - x^6 = y(x) - \text{функция чётная.}$$

Согласно свойству 6 чётности и нечётности функции сумма корней уравнения равна нулю.

Для наглядности приведём график функции (рис. 38)



Ответ. 0.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических рекомендациях для подготовки к выполнению конкурсных заданий по математике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлениям «Инженерно-техническое и Курчатовские классы» рассмотрен теоретический минимум для решения конкурсных задач базовой и повышенной сложности по математике.

Рассмотрено решение задач из трех демонстрационных вариантов.

Часть 3: «Физика»

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации предназначены для подготовки к выполнению конкурсных заданий по физике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлениям «Инженерно-техническое и Курчатовские классы».

Рассматривается необходимый теоретический минимум для решения конкурсных задач по физике. Методические рекомендации сопровождаются значительным количеством практических примеров.

В методических рекомендациях приведен разбор демонстрационных вариантов задания по физике.

Предполагается ознакомление обучающегося с термодинамика конденсированного состояния, газовые законы и тепловые машины, тепловые потоки, законы сохранения и условия равновесия в механике.

1 Механика

Механика – первая и главная часть физики как науки. На ней как на логическом скелете строятся все остальные физические науки – термодинамика, теория относительности, электромагнетизм, квантовая и атомная физика, ядерная физика и физика элементарных частиц. Механика предваряется некоторыми модельными представлениями, такими как

- материальная точка
- твёрдое тело
- гладкая гибкая невесомая нерастяжимая нить
- пружина, подчиняющаяся закону Гука
- шероховатые поверхности, подчиняющиеся закону Амонтона-Кулона и многие другие.

1.1 Особенности задач по кинематике

Кинематика – часть механики, в которой рассматриваются свойства движения безотносительно к причинам, которые эти движения вызывают. В этом смысле к этим задачам относятся задачи на прямолинейное движение, задачи на поиск оптимального движения, К кинематическим задачам можно также отнести все задачи, в которых нет необходимости искать силы, даже, если они есть. Например, это – баллистические задачи на движение в однородном поле тяжести. В этих задачах фактически заранее известно ускорение, поэтому их «динамическая» сущность не проявляется. К таким задачам можно также отнести за-

дачи на равномерное движение по окружности.

1.2 Состав кинематических задач

Задачи по кинематике состоят из

- начальных условий
- граничных условий и уравнений связи
- уравнений движения
- условий окончания движения

Начальные условия представляют совокупность координат и скоростей в начальный момент. По легенде, именно этого не хватало Лапласу для предсказания будущего Вселенной.

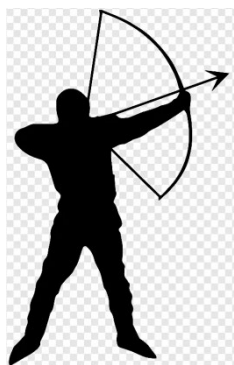
Граничные условия могут состоять, например, в наличии поглощающей или отражающей поверхности, а уравнения связи, например, связывают координаты тел, висящих по разные стороны блоков.

Уравнения движения – это например, законы прямолинейного равномерного или криволинейного равноускоренного движения (более сложные случаи пока не будем рассматривать).

Условия окончания движения могут быть различными. Например, пересечение поглощающей поверхности (при стрельбе этой поверхностью может быть цель) или остановка, или окончание времени рассмотрения.

1.3 Примеры кинематических задач

Разбор демонстрационных вариантов



1) После выстрела из лука под углом 60° к горизонту через $t_0 = 1,5$ сек с той же скоростью был произведён ещё один выстрел. Первая стрела была подстрелена второй стрелой через $t = 2,75$ сек после 2^{го} выстрела. Найти угол к горизонту, под которым была выпущена вторая стрела. Ответ представить в градусах, округлив до десятых.

Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Мы неявно предполагаем, хотя об этом и не написано в условии, что 1) Трение стрелы о воздух мало. 2) Начальные (сразу после вылета) координаты стрелы для обеих стрел одинаковы. 3) Размером стрел можно пренебречь.

Решение: В момент вылета второй стрелы горизонтальная координата 1-й стрелы равна: $X_1 = Vt_0 \cos 60^\circ$. Разность **горизонтальных** проекций скоростей 2-й и 1-й стрел в начальный момент равна: $u = V (\cos \beta - \cos 60^\circ)$. Вектор ускорения у обеих стрел одинаковый, поэтому их относительное движение является **равномерным**. Поэтому имеем равенство $X_1 = ut$.

Поскольку $V \neq 0$, уравнение для β имеет вид:

$$t_0 \cos 60^\circ = t (\cos \beta - \cos 60^\circ). \quad (1)$$

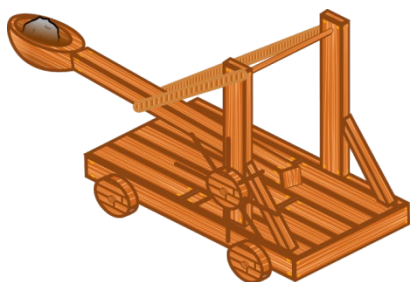
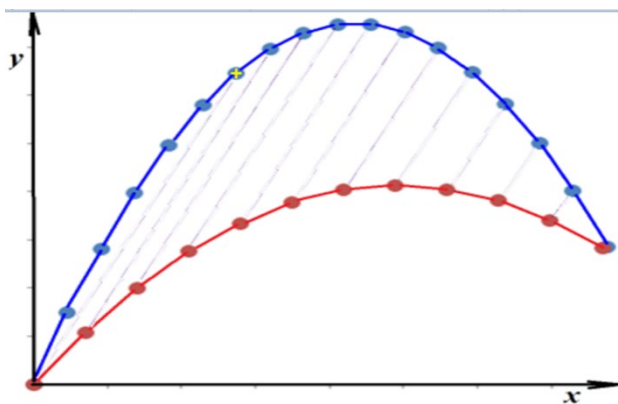
После группировки косинусов и деления на t , получим:

$$\cos \beta = \cos 60^\circ (1 + t_0/t) = 17/22. \quad \text{Отсюда } \beta = 39,4^\circ \quad (2)$$

Ответ: 39,4

Коментарий:

На рисунке справа одновременные положения стрел (с интервалом $1/4$ секунды) соединены прямыми линиями. Как видно, линия, соединяющая стрелы, движется параллельно самой себе, что делает наглядным равномерность относительного движения стрел.



2) Катапульта стоит у подножия горы параболической формы, описываемой формулой

$Y = x - x^2/L$, где $L = 3000$ м. Найти координату точки горы, в которую попадёт снаряд, выпущенный под углом 60° к горизонту. Скорость снаряда

при вылете его из катапульты $V = 150$ м/с. Считать, что $g = 10$ м/с². В ответе дать высоту точки попадания, выраженную в метрах. Округлить до целых.

Кстати, скорость вылета снарядов из обычной катапульты достигала 50 м/с. Так что наша катапульта особенная.

Как и в предыдущей задаче, мы считаем, что 1) трением снаряда о воздух, а также 2) его размерами можно пренебречь.

Решение: выписываем одну за другой совершенно очевидные формулы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}, \quad \cos \varphi = 1/2 \quad (1)$$

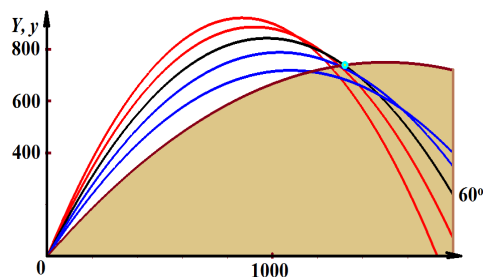
$$t = x/V_x = x/(V \cos \varphi). \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y &= V_y t - \frac{1}{2} g t^2 = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{2} x^2 / (V \cos \varphi)^2 = \\ &= x(\sqrt{3} - x / 1125) = x(1 - x / 3000). \end{aligned} \quad (3)$$

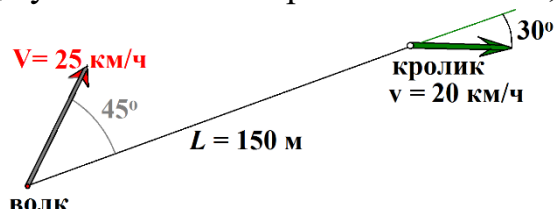
$$x = 1317,69 \dots \quad y = 738,92 \dots \quad (4)$$

Комментарий: до вершины горы (750 м) немного не долетит.

На графике справа изображён пучок траекторий снарядов, выпущенных катапультой со скоростью 150 м/с под разными углами. Максимальную дальность имеет траектория чёрного цвета, соответствующая углу, близкому к 60°. Траектории с бóльшими углами нарисованы красным, с мёньшими – синим.



3) Престарелый волк гонится за престарелым кроликом. Скорость кролика $v = 20$ км/час, волка $V = 25$ км/час. Начальное расстояние между волком и кроликом $L = 150$ м. Оба сильно косят, поэтому бегут не по прямой. Скорость кролика всегда направлена под углом 30° направо от линии, соединяющей волка и кролика. Волк, наоборот, имеет скорость под углом 45° налево от этой линии. Найти длительность предстоящей погони. Ответ выразить в минутах, округлить до целых.



Решение: изменение расстояния между материальными точками в единицу времени равно разности проекций скоростей на линию, эти точки

соединяющую. Значит, время погони равно

$$t = L / (V \cos(45^\circ) - v \cos(30^\circ)) = 25,2 \text{ [мин] } \quad (1)$$

Ответ: 25

2 Особенности задач по термодинамике

Исторически термодинамика появилась в результате грандиозной научно-технической революции, поменявшей взгляд человечества на глубинные свойства мироздания. Благодаря появлению тепловых машин в начале XIX в., человечество стало существенно богаче, причём даже не столько материально, сколько идейно. По сути, термодинамика вызвала из небытия 3 понятия – о том, что существует энергия хаотического (теплого) движения, о необратимости большинства процессов, происходящих в природе, и о состоянии равновесия, к которому стремятся все изолированные системы.

Условно термодинамика может быть разделена на 2 логически дополняющих друг друга части. Это, во-первых, феноменологическая термодинамика (ФТ), а во-вторых, - молекулярно-кинетическая теория (МКТ). Основное внимание мы будем уделять ФТ, беря из МКТ, как правило, только справочные сведения. ФТ:

- 1) не рассматривает атомную структуру материи;
- 2) использует величины, которые определяются только для макроскопической системы;
- 3) построение теории основывается на известных опытных данных;
- 4) свойства вещества в рамках ФТ выражаются в форме характеристических параметров (плотность, вязкость, теплоёмкость, теплопроводность, и т.д.).

2.1 Нулевое начало термодинамики. Температура

Как и 1-й закон Ньютона, 0-е начало термодинамики всего лишь постули-

рует возможность существования некоторого состояния, которое мы назовём термодинамическим равновесием. Существует единственная физическая величина, которая обязана быть одинаковой во всех частях системы, находящейся в термодинамическом равновесии. Это температура. При различии температур в различных областях системы, возникают тепловые потоки, которые выражают стремление системы к равновесию. Поэтому, если система замкнута, то рано или поздно система приблизится к тепловому равновесию.

Надо отметить, что способы измерения температуры различны в разных интервалах температур. Важно, что интервалы применения различных методов пересекаются, что даёт нам возможность построить единую температурную шкалу.

2.2 Уравнения состояния

Связи между различными макроскопическими характеристиками вещества называются уравнениями состояния. Для достаточно сложных систем таких уравнений может быть много. Особенно это касается многокомпонентных систем, в которых могут происходить различные реакции (например, химические). Однородная однокомпонентная система обладает только тремя независимыми макропараметрами, например, давлением, объёмом и температурой. Вместо объёма можно взять плотность, вместо температуры – энергию. Здесь надо понимать, что есть так называемые экстенсивные (глобальные) и интенсивные (локальные) величины. Глобальными являются объём, масса, число молей, энергия и т.д. Локальными – температура, давление, плотность, молярная плотность.

Надо сказать, что уравнения состояния бывают разными. Например, уравнение Ван-дер-Ваальса качественно описывает вещество, которое может переходить из жидкого состояния в парообразное и обратно. Это уравнение исследовать довольно сложно, однако, жидкое вещество вполне можно описать в

некотором ограниченном интервале температур и давлений. Это мы сделаем в 3-м разделе.

2.3 Газовые законы

Исследование идеальных газов (почти все химически стабильные газы по свойствам близки к идеальным) привело к установлению абсолютного нуля температуры. В частности, линейность зависимости давления от температуры в законе Шарля переходит в закон прямой пропорциональности при переходе к абсолютным температурам.

Перечислим основные газовые законы, из которых получилась термодинамика газов:

Бойля-Мариотта	$pV = \text{const}$	при $T = \text{const}$
Гей-Люссака	$V/T = \text{const}$	при $p = \text{const}$
Шарля	$p/T = \text{const}$	при $V = \text{const}$
Дальтона	$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$	

2.4 Уравнение Менделеева-Клапейрона и закон Дальтона

Объединяя законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Шарля, мы получим уравнение Клапейрона $pV/T = \text{const}$, которое Менделеев довёл до совершенного вида $pV = m/\mu RT$. Отношение m/μ равно числу молей и часто обозначают буквой ν (ню). Универсальная газовая постоянная $R = kN_A$, где k – константа Больцмана, N_A – число Авогадро.

Закон Дальтона даёт нам возможность судить о свойствах смесей газов. В отличие от жидкостей и твёрдых тел газы абсолютно растворяются друг в друге. При этом складываются все локально аддитивные интенсивные величины, а именно плотности, давления, теплоёмкости. Последнее особенно важно для определения адиабатического процесса в смесях газов. Интересно, что складываются также электростатическая поляризуемость для непроводящих разрежен-

НЫХ ГАЗОВ.

2.5 Внутренняя энергия идеального газа

В этом месте необходимо вспомнить, что температура (помноженная на половину константы Больцмана) есть мера средней кинетической энергии, приходящейся на одну степень свободы. Если обозначить степень свободы одной молекулы i , то средняя кинетическая энергия молекул будет равна $ikT/2$. В случае, если у молекул имеются колебательные степени свободы, каждая такая степень свободы считается за 2, потому что средняя потенциальная энергия колебаний равна средней кинетической (если колебания гармонические).

Из всего этого следует, что теплоёмкость одноатомного газа можно считать равной $C_V = 3/2 R$ Дж/моль/К, Для 2-атомного $C_V = 5/2 R$. Теплоёмкость может меняться с ростом температуры, потому что число степеней свободы может меняться.

2.6 Решение демонстрационных вариантов задачи на изопроцесс

1) Какой максимальный груз может поднять аэростат, в который закачали $m = 25$ кг водорода? Масса корзины и ткани вместе составляет $M = 200$ кг. Принять $g = 10$ м/с². Ответ дать в кг, округлить до десятых. Считать, что давление внутри шара p равно атмосферному, которое можно принять равным 10^5 Па. Считать, что эффективная молярная масса воздуха равна $\mu_{\text{возд}} = 0,029$ кг/моль. Молярная масса водорода равна $\mu_{\text{H}} = 0,002$ кг/моль. Температура воздуха на поверхности $T = 300$ К.

Решение: объём находим из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$V = mRT/\mu_{\text{H}}p \quad (1)$$

Плотность воздуха равна

$$\rho = \mu_{\text{возд}}p / RT \quad (2)$$

Сила Архимеда равна

$$F_A = \rho g V = (\mu_{\text{возд}}/\mu_H) mg \quad (3)$$

Следовательно, полная масса аэростата вместе с газом и грузом

$$M_{\text{полн}} = F_A/g = (\mu_{\text{возд}}/\mu_H) m = 25 \cdot 29/2 = 362,5 \text{ кг.} \quad (4)$$

$$\text{Груз} = 362,5 - 200 - 25 = 137,5 \text{ кг} \quad (5)$$

Ответ: 137,5

2) В аэростат закачали $m = 25$ кг водорода. На высоте $H = 30$ км, где давление равно $p = 1,1$ кПа, а температура $T = 230$ К аэростат принял шарообразную форму. Найти радиус этого шара. Ответ дать в метрах, округлить до десятых. Считать, что давление внутри шара равно атмосферному. Считать также, что эффективная молярная масса воздуха равна $\mu_{\text{возд}} = 0,029$ кг/моль, а водорода $\mu_H = 0,002$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

Решение: объём газа находим из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$V = mRT/\mu_H p = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (1)$$

Решаем это несложное уравнение, получаем $r = 17,31$ м.

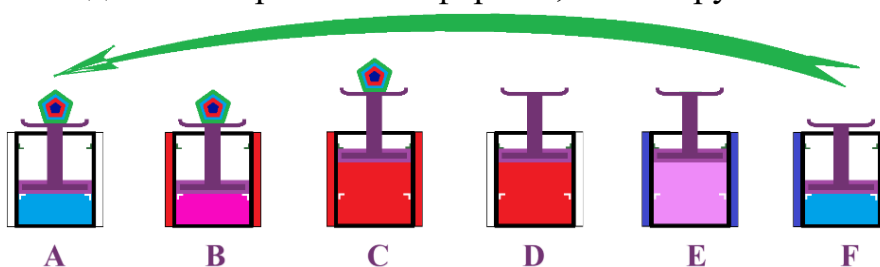
Ответ: 17,3

2.7 Закон сохранения энергии и 1-е начало термодинамики

Решение демонстрационного варианта задачи на нахождение полезной работы тепловой машины за цикл

Тепловая машина состоит из цилиндра и внешней коаксиальной ёмкости, в которую может заливаться вода. Внутри цилиндра свободно движется поршень между нижним (на высоте $h = 40$ см) и верхним (на высоте $H = 45$ см) ограничителями. Поршень соединён с верхней платформой, на которую ставится груз. Груз в данном цикле одинаковый и весит $mg = 20$ Н.

Происходят следующие процессы:



(А): В начальном положении поршень находится в нижнем положении. На платформе стоит груз. Температура газа под поршнем равна 0°С.

(В): В сопряжённую ёмкость наливается горячая вода при 100°С и давление под поршнем увеличивается.

(С): Когда давление становится достаточно большим, поршень приходит в движение и достигает верхнего положения.

(D): Груз снимается, а горячая вода сливается.

(Е): В ёмкость наливается холодная вода при температуре 0°С.

(F): Как только это становится возможным, поршень опускается до нижнего положения. Затем на платформу ставится новый груз, вода сливается и получается состояние (А) нового цикла.

Требуется найти полезную работу за цикл. Ответ дать в Дж, округлить до целых.

Решение: в данном случае полезной работой следует считать работу по поднятию груза. Она может быть вычислена по формуле

$$A = mg(H-h) \quad (1)$$

Ответ: 1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических рекомендациях для подготовки к выполнению конкурсных заданий по физике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации в номинации «Инженерный класс» по направлениям «Инженерно-техническое и Курчатовские классы».

Приведен теоретический материал по ознакомлению с термодинамикой (газовыми законами и тепловыми машинами) и механикой (кинематика).

Разобраны задачи демонстрационных вариантов задания.