А.В. Абрамов

Методические рекомендации к выполнению конкурсных заданий по информатике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «*Кадетский класс*» по направлениям «Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера (МЧС)», ВКС, СВ, ПВО, РВСН, ВМФ»

МОСКВА 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации предназначены для подготовки к выполнению конкурсных заданий по информатике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «*Кадетский класс*» по направлению «Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера (МЧС)», ВКС, СВ, ПВО, РВСН, ВМФ».

Рассматривается необходимый теоретический минимум для решения конкурсных задач базовой сложности по информатике. Методические рекомендации сопровождаются большим количеством практических примеров.

В методических рекомендациях приведен разбор демонстрационного варианта задания по информатике.

Предполагается ознакомление обучающегося с математическими основами логики, в частности с представлением булевых функций.

1 ПОНЯТИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Булева функция определяется над двоичными переменными.

Под **двоичной переменной** будем понимать переменную, которая принимает значение из дискретного множества {0;1}.

Булевой функцией (**БФ**, в дальнейшем) от n-двоичных переменных называется их отображение во множество значений {0;1}.

Функция определяется на множестве сочетаний E. Плотность множества определяется количеством переменных согласно формуле

$$N = 2^n$$

Иными словами, определить множество E – задать все возможные сочетания двоичных значений для n-переменных

Номер набора	$X_{n-1}\ X_{n-2}\ X_{n-3} \ldots\ X_1 X_0$
0	000..00
1	000..01
2	000..10
2^n-1	111..11

Для того, чтобы определить булеву функцию необходимо для каждого набора из E задать значение из множества {0;1}, иными словами каждому сочетанию поставить в соответствие значение {0;1}.

Пример 1.1. Пример задания булевой функции от двух переменных

x1 x2	F
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Подобный способ описания булевой функции называется табличным, а таблица – таблицей истинности.

Определим общее количество функций от n-переменных и введем описание основных.

$$NF = 2\hat{}(2^n)$$

Таким образом, существует 2 беспараметрических БФ ($NF=2\hat{}2^0=2$). Несложно догадаться, что это константы 0 и 1.

Для n=1 функций уже 4 ($NF=2\hat{}2^1=4$). Опишем их в табличной форме.

X	F0	F1	F2	F3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции F0,F3 нам уже знакомы – это константы 0 и 1.

Функция F1 тождественна x (F1=x), функция F2 отрицает x ($F2=\bar{x}$) и называется инверсией.

Для n=2 функций уже 16 ($NF=2\hat{}2^2=16$). Определим их в табличной форме.

x y	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

В таблице определены основные булевы функции, рассмотрим некоторые из них.

Функция F1 называется конъюнкцией (операцией логического И, операцией логического умножения).

x	y	F1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначается амперсандом (&), звездочкой (*), «шапочкой» (∧) или контекстом выражения.

$$F1 = x\&y = x * y = x \wedge y = xy$$

В контексте логики высказываний такую функцию описывают предикатом «*Функция И истинна только тогда, когда истинны все ее аргументы*».

Функция F7 называется дизъюнкцией (операцией логического ИЛИ, операцией логического суммирования).

x	y	F7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Обычно обозначается галочкой (∨).

$$F7 = x \vee y$$

В контексте логики высказываний такую функцию описывают предикатом «*Функция ИЛИ ложна только тогда, когда ложны все ее аргументы*».

Функцию F8 называют стрелкой Пирса (ИЛИ-НЕ).

x	*y*	F8
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Описывается выражением

$$F8 = \overline{x \vee y}$$

Функция представляет собой отрицание функции ИЛИ.

Функцию F14 называют штрихом Шеффера (И-НЕ).

x	*y*	F14
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Описывается выражением

$$F14 = \overline{x * y}$$

Функция представляет собой отрицание функции И.

Перечисленные функции относятся к наиболее часто встречающимся на практике логическим функциям, но часто используют и специальные функции.

Функция F6 называется суммой по модулю 2 (исключающее ИЛИ).

x	y	F6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Описанная функция обозначается символом $\oplus$.

$$F6 \ = x \oplus y$$

В контексте логики высказываний такую функцию описывают предикатом «*Функция ИСКЛЮЧАЩЕЕ ИЛИ представляет собой результат арифметического суммирования в одном разряде*».

Функция F9 называется эквиваленцией.

x	y	F9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Описанная функция обозначается символом ≡.

$$F9 \ = (x \equiv y)$$

Функция описывает тождественность ее аргументов.

Функция F11 называется импликацией.

x	y	F13
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Описанная функция обозначается символом →.

$$F13 = x \to y$$

2 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Теоретическим описанием БФ называется описание функции на основе базисных функций.

Логическим базисом называется такое сочетание булевых функций посредством которого можно описать произвольную булеву функцию.

Известно три логических базиса:

1. Основной (И, ИЛИ, НЕ)
2. Базис на И-НЕ
3. Базис на ИЛИ-НЕ

Теоретическое описание любой БФ может быть построено на любом из этих базисов. Общая схема такого подхода выглядит следующим образом:

1. Построение описания на совершенных формах (ДСНФ/КСНФ)
2. Упрощение описания с целью уменьшения количества букв в записи при сохранении равнозначности

На практике часто встречаются задачи преобразования описаний функций, в частности, преобразование теоретического описания в табличному (к таблице истинности) или преобразование табличного описания в теоретическому.

Рассмотрим примеры преобразования теоретического описания к табличному, иными словами построим таблицу истинности заданной функции по ее формульной записи.

Пример 1.2. Построить таблицу истинности функции $f1 = \bar{x} \oplus y$

Аргументов у функции n=2, плотность множества E $N = 2^2 = 4$

x y	$f1 = \bar{x} \oplus y$
0 0	(0/1)?
0 1	(0/1)?
1 0	(0/1)?
1 1	(0/1)?

Для расчета значений f1 обратимся к таблицам истинности функций инверсии и исключающего ИЛИ и отметим, что

1) $\bar{0} = 1;\ \bar{1} = 0$ (инверсия)

2) $0 \oplus 0 = 0;\ 0 \oplus 1 = 1;\ 1 \oplus 0 = 1;\ 1 \oplus 1 = 0$ (исключающее ИЛИ)

Получим

$$f1(0,0) = \bar{0} \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1$$

$$f1(0,1) = \bar{0} \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$f1(1,0) = \bar{1} \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0$$

$$f1(1,0) = \bar{1} \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1$$

x y	$\bar{x}$	$f1 = \bar{x} \oplus y$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	0
1 1	0	1

Пример 1.3. Построить таблицу истинности функции $f2 = \overline{(\bar{x} \equiv y) \to yz}$

Для расчета значений f2 обратимся к таблицам истинности функций инверсии, эквиваленции и импликации и отметим, что

1) $\bar{0} = 1;\ \bar{1} = 0$ (инверсия)

2) $0 \equiv 0 = 1;\ 0 \equiv 1 = 0;\ 1 \equiv 0 = 0;\ 1 \equiv 1 = 1$ (эквиваленция)

3) $0 \to 0 = 1;\ 0 \to 1 = 1;\ 1 \to 0 = 0;\ 1 \to 1 = 1$ (импликация)

Расчет таблицы истинности функции ведется последовательно с учетом приоритета операций:

1) Действия в скобках
2) Инверсия
3) Конъюнкция
4) Дизъюнкция
5) Импликация
6) Исключающее ИЛИ, эквиваленция

x y z	$\bar{x}$	$\bar{x} \equiv y$	yz	$(\bar{x} \equiv y) \rightarrow yz$	$f2 = \overline{(\bar{x} \equiv y) \rightarrow yz}$
0 0 0	1	0	0	1	0
0 0 1	1	0	0	1	0
0 1 0	1	1	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1	0
1 0 0	0	1	0	0	1
1 0 1	0	1	0	0	1
1 1 0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	1	1	0

Таким образом, по теоретическому описанию восстанавливается таблица истинности.

В общем случае, переход к теоретическому описанию функции от табличного представляет собой задачу построения равнозначной функции достаточно громоздок, поэтому в контрольных задачах ограничимся проверкой эквивалентности.

3 ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Две булевых функции считаются экивалентными, если полностью совпадают множества их единичных и нулевых наборов.

Пример 1.4. Проверить на равнозначность функции $f1 = \bar{x} \oplus y$ и $f2 = x \oplus \bar{y}$

Для решения задачи построим таблицу истинности функций f1 и f2.

x y	$f1 = \bar{x} \oplus y$	$f2 = x \oplus \bar{y}$
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	0	0
1 1	1	1

Отмечаем, что множества единичных и нулевых наборов функции f1 и f2 полностью совпадают, и значит, функции равнозначны.

Пример 1.5. Проверить на равнозначность функции $f3 = x \oplus y$ и $f1 = \bar{x} \oplus y$

Для решения задачи построим таблицу истинности функций f3 и f1.

x y	$f3 = x \oplus y$	$f1 = \bar{x} \oplus y$
0 0	0	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

Отмечаем, что множества единичных и нулевых наборов функции f3 и f2 не совпадают, и значит, функции неравнозначны.

Проверка на эквивалентность является частью более общей задачи восстановления теоретического описания функции по табличному. В этом случае надо иметь таблицу истинности исходной функции и набор теоретических описаний, которые проверяются на эквивалентость таблице истинности исходной функции.

Пример 1.6. Восстановить по табличному описанию теоретическое.

Функция от трех переменных задана своей таблицей истинности.

Таблица истинности булевой функции F имеет вид

x y z	f
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

Укажите, какая функция соответствует функции f:

- $f1 = x * y * z \lor \bar{x} * \bar{y} * \bar{z}$
- $f2 = x * y * z \lor \bar{y} * \bar{z}$
- $f3 = x * y * z \lor \bar{x} * \bar{y} * \bar{z} \lor \bar{x} * y * z$

Для решения задачи построим таблицу истинности функций f1, f2 и f3.

x y z	f	f1	f2	f3
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	0	0	0	0
0 1 0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1
1 0 0	1	0	1	0
1 0 1	0	0	0	0
1 1 0	0	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

Отмечаем, что множества единичных и нулевых наборов функций

- f и f1 не совпадают;
- f и f2 совпадают;
- f и f3 не совпадают.

Таким образом, таблице истинности соответствует $f2 = x * y * z \lor \bar{y} * \bar{z}$

Проверка на эквивалентность может выполняться и для теоретических описаний. В этом случае возможны два подхода:

1) По теоретическим описаниям строятся булевы функции и они проверяются на эквивалентность (см. Примеры 1.4, 1.5).

2) Приведение по законам алгебры логики.

Законы алгебры логики:

Закон тождества	$\boldsymbol{A = A}$
Закон противоречия	$\boldsymbol{A \wedge \overline{A} = 0}$
Закон исключающего третьего	$\boldsymbol{A \vee \overline{A} = 1}$
Закон двойного отрицания	$\boldsymbol{\overline{\overline{A}} = A}$
Свойства констант	$\boldsymbol{\overline{0} = 1, \overline{1} = 0\ ;\ A \wedge 0 = 0, A \wedge 1 = A}$ $\boldsymbol{A \vee 0 = A, A \vee 1 = 1}$
Законы идемпотентности	$\boldsymbol{A \wedge A = A, A \vee A = A}$
Законы коммутативности	$\boldsymbol{A \wedge B = B \wedge A, A \vee B = B \vee A}$
Законы ассоциативности	$\boldsymbol{(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C),}$ $\boldsymbol{(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)}$
Законы дистрибутивности	$\boldsymbol{A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)\ ,}$ $\boldsymbol{A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$
Законы поглощения	$\boldsymbol{A \vee (A \wedge B) = A, A \wedge (A \vee B) = A}$
Законы де-Моргана	$\boldsymbol{\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}, \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}}$
Правила замены импликации	$\boldsymbol{A \to B = \overline{A} \vee B, A \to B = \overline{B} \to \overline{A}}$
Правила замены эквиваленции	$\boldsymbol{A \equiv B = A \wedge B \vee \overline{A} \wedge \overline{B} = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)}$
Замена исключающего ИЛИ	$\boldsymbol{A \oplus B = A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \wedge B = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})}$
Правило свертки	$\boldsymbol{A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B}$
Правило расширения	$\boldsymbol{(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge C) \vee (B \wedge C) = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge C)}$
Правило склейки	$\boldsymbol{(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A}$

Пример 1.4. Проверить на равнозначность функции $f1 = \bar{x} \oplus y$ и $f2 = x \oplus \bar{y}$

$$f1 = \bar{x} \oplus y = \bar{\bar{x}}y \vee \overline{x}\,\overline{y} = xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$$
$$f2 = x \oplus \overline{y} = x\bar{\bar{y}} \vee \overline{x}\,\overline{y} = xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$$

Функции f1 и f2 эквивалентны.

Данный способ требует хороших знаний законов алгебры логики и больших практических навыков по преобразованию логических выражений, поэтому не рекомендуется для решения задачи.

4 РАЗБОР ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА ЗАДАЧИ

Булева функция описана формулой $f = \overline{(x \vee y) \longrightarrow (\overline{x}yz \vee z)}$.

Среди перечисленных ниже функций определите функцию эквивалентную ей.

1) $\alpha = \overline{x} \vee y \vee \overline{z}$
2) $\beta = \overline{x}y \vee \overline{z}$
3) $\gamma = x\overline{z} \vee y\overline{z}$

В ответе укажите номер функции

Ответ …

Решение

Задачу решаем сравнением таблиц истинности исходной функции и проверяемых. Функции считаются идентичными при совпадении множеств единичных и нулевых наборов.

Таблица истинности строится для функции от 3-х переменных на наборах значений (000,001,010,011, 100,101,110,111)

Построение таблиц истинности начнем с таблицы истинности исходной функции.

$x\ y\ z$	$x \vee y$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}yz\ v\ z$	$(x \vee y) \longrightarrow (\overline{x}yz \vee z)$	$f = \overline{(x \vee y) \longrightarrow (\overline{x}yz \vee z)}$
0 0 0	0	0	0	1	0
0 0 1	0	0	1	1	0
0 1 0	1	0	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1	0
1 0 0	1	0	0	0	1
1 0 1	1	0	1	1	0
1 1 0	1	0	0	0	1
1 1 1	1	0	1	1	0

Далее строим таблиц истинности проверяемых функций.
Начнем с функции α.

$x\ y\ z$	$\overline{x}$	$\overline{z}$	$\alpha = \overline{x} \vee y \vee \overline{z}$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	1
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	0	0
1 1 0	0	1	1
1 1 1	0	0	1

Продолжим функцией β.

$x\ y\ z$	$\overline{x}$	$\overline{x}y$	$\overline{z}$	$\beta = \overline{x}y \vee \overline{z}$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1	0	0	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	0	0	1	1
1 0 1	0	0	0	0
1 1 0	0	0	1	1

1 1 1	0	0	0	0

Закончим функцией γ.

$x\,y\,z$	$\overline{z}$	$x\overline{z}$	$y\overline{z}$	$\gamma = x\overline{z} \vee y\overline{z}$
0 0 0	1	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	1	1
0 1 1	0	0	0	0
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	0	0	0	0
1 1 0	1	1	1	1
1 1 1	0	0	0	0

Для удобства сведем все в одну таблицу и сравним результаты

$x\,y\,z$	f	α	β	γ
0 0 0	0	1	1	0
0 0 1	0	1	0	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0
1 0 0	1	1	1	1
1 0 1	1	0	0	0
1 1 0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	0	0

Видим, что с исходной функцией f полностью совпадает функция γ, а значит, она является эквивалентной ей.

Ответ: 3

Возможно альтернативное решение.

*Решение **

$$f = \overline{(x \vee y) \longrightarrow (\overline{x}yz \vee z)}$$

$$\overline{A \longrightarrow B} = \overline{\overline{A} \vee B} = \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} = A \wedge \overline{B}$$

$$f = (x \vee y) \wedge \overline{(\overline{x}yz \vee z)}$$

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$(\overline{x}yz \vee z) = z \vee \overline{x}yz = z$$

$$f = (x \vee y) \wedge \overline{z} = x\overline{z} \vee y\overline{z}$$

Несмотря на кажущуюся простоту оно значительно сложнее, поскольку требует хорошего знания алгебры логики и интуитивного понимания конечного результата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических рекомендациях для подготовки к выполнению конкурсных заданий по информатике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «*Кадетский класс*» по направлению «Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера (МЧС)», ВКС, СВ, ПВО, РВСН, ВМФ» рассмотрен теоретический минимум для решения конкурсных задач базовой сложности по информатике.

Приведен теоретический материал по ознакомлению с основами описания булевых функций и вариантам их описания. Рассмотрено решение задач по булевым функциям и разобран демонстрационный вариант задания базового уровня сложности по информатике.