ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ "МИСИС"

Краткие методические указания к заданиям теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлению Инженерно-химическое

Авторы:
Зотов В.В.
Адигамов А.Э.
Блохин Д.И.
Лезова С.П.
Минаев В.И.
Нестерова В.Г.

Москва, 2024

Содержание

Введение

Данные краткие методические указания разработаны к заданиям теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлению Инженерно-химическое (далее Конкурс).

Методические материалы подготовлены на основании документа «Спецификация конкурсных материалов для проведения теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» по направлению Инженерно-химическое» (далее Спецификация) и разработанного в соответствии со Спецификацией демонстрационного варианта заданий теоретического этапа.

Профильными предметами, знания по которым проверяются в рамках направления Инженерно-химическое являются: математика, физика, химия.

Методические указания предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих подготовку обучающихся предпрофессиональных классов в рамках проекта «Инженерный класс в московской школе», с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационного варианта, возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок.

Теоретический этап Конкурса проводится в форме компьютерного тестирования. Используемое оборудование: компьютер, подключенный к интернету, с колонками и микрофоном. На выполнение заданий теоретического этапа Конкурса отводится 120 минут. Во время выполнения работы разрешается использовать обычный встроенный калькулятор и таблицу Менделеева, приложенную к тестовой платформе.

В контрольно-измерительных материалах используются задания базового и повышенного уровня сложности, с выбором одного ответа из нескольких предложенных и с кратким ответом. Индивидуальный вариант участника включает 10 заданий, базирующихся на содержании предметов: математика, физика, химия. Задание считается выполненным, если ответ участника совпал с эталоном. Максимальный балл за выполнение всех заданий – 60 баллов.

При подготовке к теоретической части рекомендуется изучить Спецификацию и демонстрационный вариант заданий, а также дополнительно просмотреть специально подготовленные видеоматериалы, опубликованные на сайте https://im.mcko.ru/mo.php в соответствии с выбранными направлениями и номинациями Конкурса.

Во всех материалах используется общая сквозная нумерация задач в соответствии со Спецификацией.

Все материалы Конкурса размещены на сайте https://im.mcko.ru/.

Раздел 1. Общие указания к решениям задач по математике

1.1. Геометрический смысл производной

Одна из задач демонстрационного варианта посвящена графикам функций, решение которой может быть реализовано через производную. В связи с этим ниже представлены основные теоретические сведения о производной и об ее практической применимости при решении задач.

Большинство школьных учебников даёт определение производной через определение предела. А определение предела не даётся вообще. Поэтому школьники в лучшем случае помнят таблицу производных и правила нахождения производной, но смутно представляют, что же именно они ищут.

Постараемся доступно объяснить, что такое производная и как её применять. Наше изложение неформально, ни о какой строгости сейчас не может быть и речи. Черёд строгого изложения придёт на первом курсе университета при изучении математического анализа. Начнём с простого вопроса. Нарисуем графики двух функций ***f(x)*** и ***g(x)***.

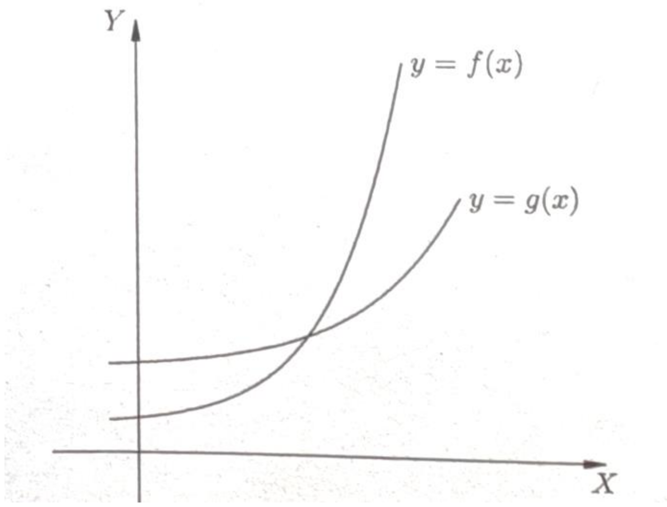


Рисунок 1.

Спрашивается: какая из них быстрее растёт? Ответ очевиден: конечно, ***f(x)***. Скорость изменения функции ***f(x)*** больше. Скорость изменения функции и называется производной этой функции. У функции ***f(x)*** производная больше. Хорошо, но как мы оценивали производную? Мы смотрели, насколько круто идет вверх график функции, то есть насколько быстро меняется координата $\boldsymbol{y}$ при изменении переменной $\boldsymbol{x}$. Очевидно, что одна и та же функция в разных точках может меняться быстрее или медленнее, то есть иметь разные значения производной. Покажем, как найти производную с помощью графика функции.

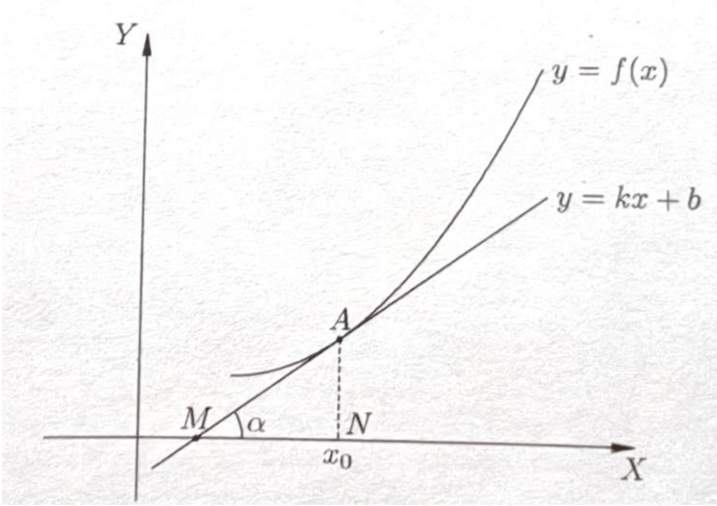


Рисунок 2.

Возьмём на графике ***y = f(x)*** точку ***A*** с абсциссой $\boldsymbol{x_0}$. Проведём в точке ***A*** касательную к графику функции. Предполагается, что касательную провести возможно, хотя, такое бывает не всегда. Надо оценить, насколько быстро растёт функция, то есть насколько быстро идет вверх её график. Удобная величина для этого тангенс угла наклона касательной к графику функции.

Производная функции ***f(x)*** в точке $\boldsymbol{x_0}$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции ***y =f(x)***, проведённой в точке ***A*** с абсциссой $\boldsymbol{x_0}$

$$\boldsymbol{f'(x_0) = tg\alpha}.$$

Поскольку тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему, из прямоугольного треугольника ***AMN*** находим:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{AN}{MN}}\,.$$

Мы смогли найти производную без всяких таблиц, пользуясь только графиком функции.

Есть ещё одно важное соотношение. Вспомним, что в уравнении прямой

$$\boldsymbol{y = kx + b}$$

угловой коэффициент $\boldsymbol{k}$ показывает, насколько круто идёт прямая по отношению к оси абсцисс. Численно коэффициент $\boldsymbol{k}$ равен тангенсу угла наклона прямой: $\boldsymbol{k = tg\alpha}$.

Таким образом, производная функции в точке $\boldsymbol{x_0}$ равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции, проведённой в точке $\boldsymbol{A}$ с абсциссой $\boldsymbol{x_0}$:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = tg\alpha}.$$

Обратим внимание, что угол $\boldsymbol{\alpha}$ мы измеряем между касательной к графику и положительным направлением оси абсцисс. При этом $\boldsymbol{\alpha \in [0, \pi)}$.

Если функция возрастает (как, например, вблизи точки $\boldsymbol{A}$), то касательная образует острый угол $\boldsymbol{\alpha}$ с положительным направлением оси $\boldsymbol{X}$. Тангенс острого угла положителен. Следовательно, если функция возрастает, то её производная положительна. Так, в нашем примере будет $\boldsymbol{f'(x_0) > 0}$.

А если функция убывает? То касательная к графику, проведённая в точке $\boldsymbol{B}$ с абсциссой $\boldsymbol{x_1}$, образует тупой угол $\boldsymbol{\alpha}$ с положительным направлением оси $\boldsymbol{X}$. Тангенс тупого угла отрицателен. Значит, если функция убывает, её производная отрицательна: $\boldsymbol{f'(x_0) < 0}$.

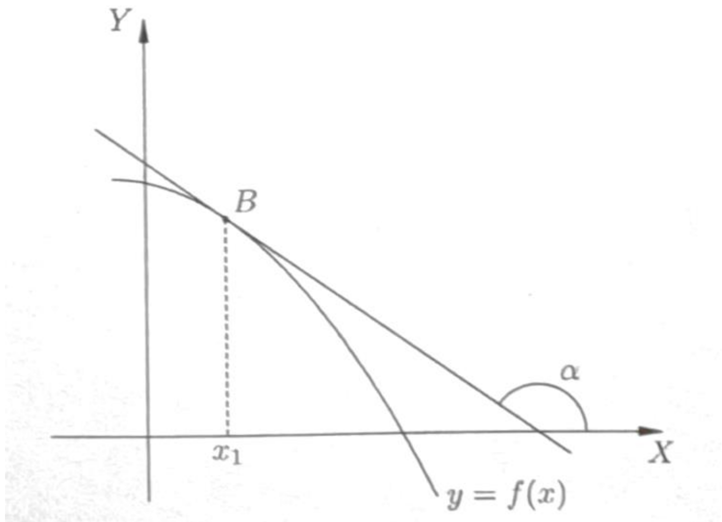


Рисунок 3.

Верны и обратные утверждения:

- если производная функции положительна на некотором промежутке, то функция возрастает на данном промежутке;

- если производная функции отрицательна на некотором промежутке, то функция убывает на данном промежутке.

Особый интерес представляют точки, в которых производная обращается в нуль. Они называются стационарными точками функции. Стационарные точки могут быть трёх видов.

1. **Точка максимума**

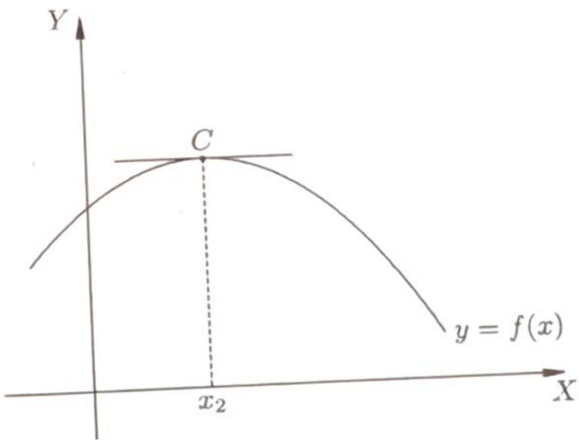


Рисунок 4.

Касательная в точке $\boldsymbol{C}$ горизонтальна, т. е. образует нулевой угол с осью $\boldsymbol{X}$. Поэтому $\boldsymbol{f'(x_2) = 0}$. При переходе через точку $\boldsymbol{x_2}$ возрастание функции сменяется убыванием. Иными словами, производная меняет знак с (+) на (−). Точка $\boldsymbol{x_2}$ является точкой максимума: значение функции в точке $\boldsymbol{x_2}$ больше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

2. **Точка минимума**

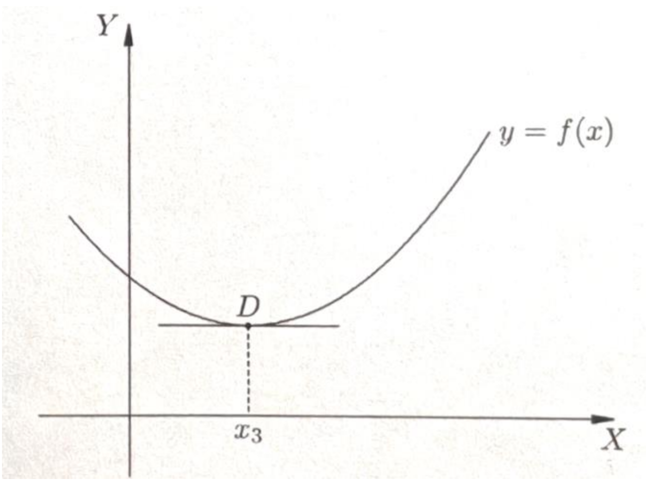


Рисунок 5.

Касательная в точке $\boldsymbol{D}$ также горизонтальна. Поэтому $\boldsymbol{f'(x_3) = 0}$. При переходе через точку $\boldsymbol{x_3}$ убывание функции сменяется возрастанием, т. е. производная меняет знак с (−) на (+). Точка $\boldsymbol{x_3}$является точкой минимума: значение функции в точке $\boldsymbol{x_3}$ меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

3. Седловая точка

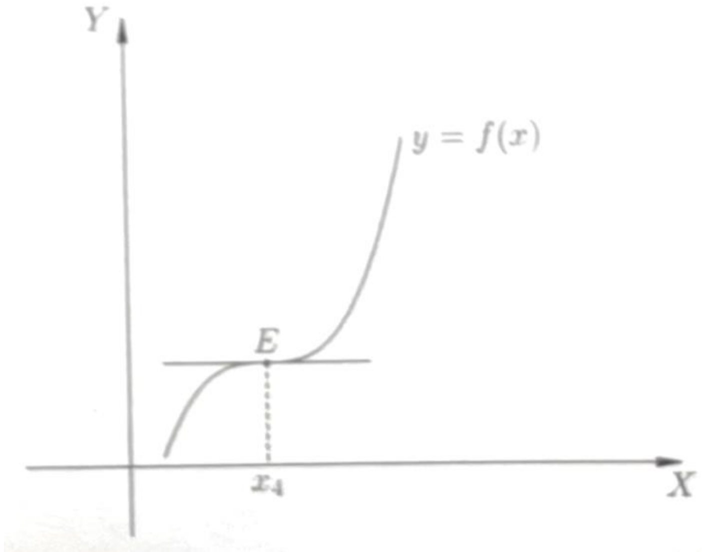


Рисунок 6.

Касательная в точке $\boldsymbol{E}$ горизонтальна, $\boldsymbol{f'(x_4) = 0}$. При переходе через точку $\boldsymbol{x_4}$ смены тенденции не происходит: функция как возрастала, так и продолжает возрастать. Производная не меняет своего знака. Стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума, называется седловой точкой. Точка $\boldsymbol{x_4}$ седловая точка.

Возможны ситуации, когда производная в данной точке не существует. Такое может случиться, например, когда на графике функции имеется излом. В точке излома касательную провести нельзя (рис. 7).

На данном графике в точках $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ касательная не существует. Следовательно, не существует и производная в точках $\boldsymbol{x_5}$ и $\boldsymbol{x_6}$.

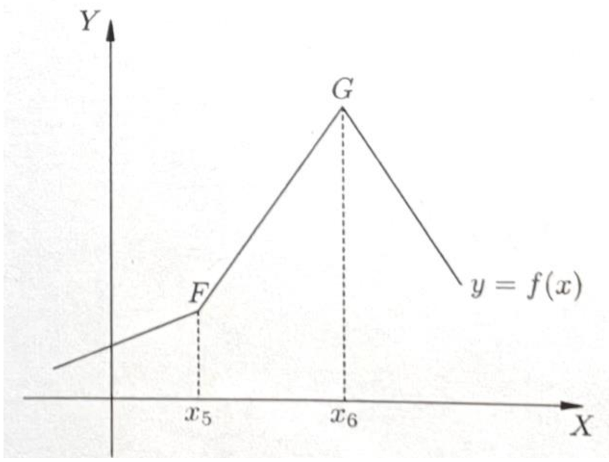


Рисунок 7.

Но производная может не существовать даже в том случае, когда существует касательная. Вспомните, ведь производная это тангенс угла наклона касательной. И если касательная образует с осью $\boldsymbol{X}$ угол 90 градусов, то тангенс не существует.

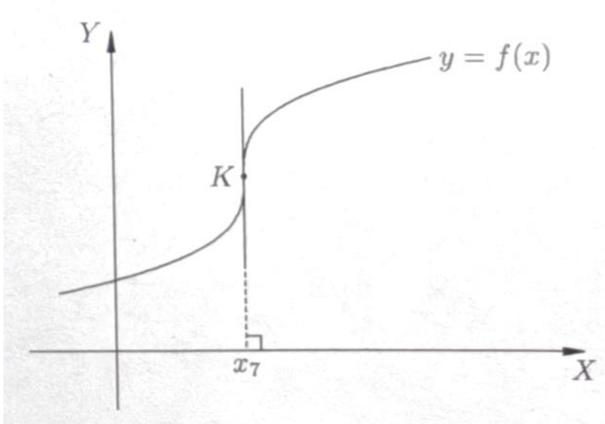


Рисунок 8.

В случае, изображённом на рисунке, производная в точке $\boldsymbol{x_7}$ не существует. Стационарные точки (типа $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$), а также точки типа $\boldsymbol{x_5}$, $\boldsymbol{x_6}$, $\boldsymbol{x_7}$ называются критическими точками. Критическая точка функции - это внутренняя точка области определения, в которой производная равна нулю или не существует. Случаи, когда производная не существует, могут встретиться в различных задачах, но в задачах, используемых в качестве контрольно-измерительных материалов Конкурса, все производные могут быть определены.

1.2. Разбор решений заданий по математике демонстрационного варианта

Задание 1.

При проведении опроса среди населения выяснилось, что большая часть опрошенных предпочитает отдыхать в России, а не за рубежом. Девять человек затруднились сделать выбор. Среди любителей отдыха за рубежом 90% предпочитают отдых в горах другим видам отдыха. Среди любителей отдыха в России 50% предпочитают отдых у моря, $35\frac{5}{7}$% предпочитают отдых в горах, а оставшиеся два человека предпочли отдых на даче. Сколько человек было опрошено?

Решение

1. Пусть отдых в России предпочитает ***X*** человек. Из них 50% предпочитают отдыхать на море, а $35\frac{5}{7}$% в горах.

Остальные $100 - 50 - 35\frac{5}{7} = 14\frac{2}{7} = \frac{100}{7}$% предпочитают отдыхать на даче, а их по условию задачи 2 человека из ***X*** человек. Составим пропорцию:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{X}\ \text{человек} - \mathbf{100}\% \\ \mathbf{2}\ \text{человека} - \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{7}}\%.\end{gathered}$$

Из пропорции получаем $\frac{\mathbf{100}}{\mathbf{7}} \cdot \boldsymbol{X} = \mathbf{100} \cdot \mathbf{2} \quad \Rightarrow \boldsymbol{X} = \mathbf{14}$.

Предположим, что отдых за рубежом предпочитает ***Y*** человек, 90 % из них предпочитает отдых в горах. Это $\frac{\mathbf{9} \cdot \boldsymbol{Y}}{\mathbf{10}}$ человек. Чтобы это число было целым, ***Y*** должно быть кратно 10. Тогда это числа 10; 20; 30;….. Из них по условию задачи нас устраивает только ***Y*** =10, т.к. большинство людей предпочитают отдыхать в России (***X***>***Y***). Таким образом, было опрошено ***X+Y+9=14+10+9=33*** человека.

Ответ: 33

Задание 2.

Прямая $\boldsymbol{y = kx + b}$ является общей касательной к графикам функций

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$ и $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 4x + 8}$.

Найдите значение выражения $\boldsymbol{k - b}$.

Решение

Найдём производные функций $\boldsymbol{f(x)}$ и $\boldsymbol{g(x)}$:

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x;}$$

$$\boldsymbol{g'(x) = 2x - 4.}$$

Запишем уравнение касательной к графику функции $\boldsymbol{f(x)}$**,** проведённой в точке $\boldsymbol{x_1}$:

$$\boldsymbol{y = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1) =}$$

$$\boldsymbol{=2x_1(x - x_1) + x_1^2 = 2x_1x - x_1^2 \Rightarrow (k = 2x_1;\ \ b = -x_1^2)}$$

Запишем уравнение касательной к графику функции $\boldsymbol{g(x)}$**,** проведённой в точке $\boldsymbol{x_2}$:

$$\boldsymbol{y = g'(x_2) \cdot (x - x_2) + g(x_2) =}$$

$$\boldsymbol{=(2x_2 - 4)(x - x_2) + x_2^2 - 4x_2 + 8 = (2x_2 - 4)x - x_2^2 + 8 = kx + b}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow (k = 2x_2 - 4;\ \ b = 8 - x_2^2)}$$

Получили систему уравнений:

$$\boldsymbol{\begin{cases} 2x_1 = 2x_2 - 4 \\ -x_1^2 = 8 - x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ x_1^2 - x_2^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -8 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ -2(x_1 + x_2) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}}$$

Сложив два последних уравнения системы, получаем:

$\boldsymbol{2x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1}$.

Значит:

$$\boldsymbol{k = 2x_1 = 2\ ;}$$

$$\boldsymbol{b = -x_1^2 = -1}$$

$$\boldsymbol{k - b = 3}$$

Ответ: 3

Задание 3.

Известно, что $\boldsymbol{f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=px+4.}$

Найдите значение параметра $\boldsymbol{p}$, если $\boldsymbol{f(3)=-1.}$

Решение

Подставим в уравнение $\boldsymbol{x=3}$:

$\boldsymbol{f(3)+2f\left(\frac{1}{3}\right)=3p+4,}$ т.к. $\boldsymbol{f(3)=-1,}$ то:

$$\boldsymbol{-1+2f\left(\frac{1}{3}\right)=3p+4 \ \Rightarrow \ 2f\left(\frac{1}{3}\right)=3p+5 \ \Rightarrow \ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}(3p+5)}.$$

Подставим в уравнение $\boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$:

$\boldsymbol{f\left(\frac{1}{3}\right)+2f(3)=\frac{1}{3}p+4,}$ т.к. $\boldsymbol{f(3)=-1,}$ то:

$$\boldsymbol{f\left(\frac{1}{3}\right)-2=\frac{1}{3}p+4 \ \Rightarrow \ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}p+6}.$$

Значит:

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}(3p+5)=\frac{1}{3}p+6 \Rightarrow 9p+15=2p+36 \ \Rightarrow 7p=21 \Rightarrow p=3}.$$

Ответ: 3.

Раздел 2. Общие указания к решениям задач по физике

2.1. Области знаний по физике для подготовки к Конкурсу

Для успешного решения предлагаемых задач учащиеся должны уметь анализировать физические процессы (явления), используя основные положения и законы, изученные в курсе физики. Правильно трактовать физический смысл изученных физических величин, законов и закономерностей. Решать расчётные задачи с явно заданной физической моделью с использованием законов и формул из различных разделов курса физики. В частности, обладать знаниями по следующим разделам школьного курса физики:

1) Уравнение Менделеева – Клапейрона

2) Закон Дальтона

3) Изопроцессы, графическое представление изопроцессов на pV-, pT- и VT-диаграммах

4) Основы термодинамики (первый закон термодинамики, изменения внутренней энергии тела).

5) Вычисление работы по графику процесса на pV-диаграмме

6) Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Линейчатые спектры. Спектр уровней энергии атома водорода.

7) Электромагнитные волны. Шкала электромагнитных волн. Применение электромагнитных волн в технике и быту.

2.2. Разбор решений заданий по физике демонстрационного варианта

Задание 1.

Астрономы, находящиеся на орбитальной станции, исследуя маленькую быстродвижущуюся точку, которую идентифицировали как новую комету C/2024 M45 (хвост кометы практически невиден), в спектре излучения которой обнаружили характерные линии для атомарного водорода. Анализ спектра излучения водорода входящего в состав кометы, показал, что длина волны головной линии в серии Бальмера этого спектра равна 656,69 нм. Затем исследовав в лаборатории спектр водородной лампы, получили результат 656,47 нм для аналогичной спектральной линии. Используя эти данные определите в каком направлении и с какой скоростью, комета движется относительно станции.

Варианты ответов:

а. приближается со скоростью примерно 100 км/с

б. удаляется со скоростью примерно 50000 км/с

в. удаляется со скоростью примерно 100 км/с

г. удаляется со скоростью примерно 10 км/с

Теория

Спектральный анализ широко применяется в различных областях науки, в том числе в астрофизике. Изучая спектры поглощения и излучения, возможно определить из каких химических элементов и молекул состоят космические объекты, с какой скоростью они движутся, температуру, массу и другие характеристики таких тел.

В середине XIX века Кристианом Доплером был открыт эффект (эффект Доплера), устанавливающий связь между изменением длины волны движущегося источника электромагнитных волн и его скоростью движения относительно наблюдателя. Доказательство этого эффекта вытекает из специальной теории относительности, сформулированной А. Эйнштейном. Так применяя преобразования Лоренца к уравнениям плоской волны в системах отсчёта, связанных с источником и наблюдателем, можно получить выражение для регистрируемой наблюдателем длины волны $\lambda(v)$. Более подробно с эффектом Доплера и основами спектрального анализа можно ознакомиться в учебниках, приведенных в списке рекомендованной литературы.

Решение

В решении задачи необходимо использовать закон Доплера, который устанавливает связь между изменением длины волны излучения, регистрируемого наблюдателем и скоростью движения источника излучения относительно наблюдателя

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

где: λ_0 – длина волны источника излучения, λ – длина волны, регистрируемая наблюдателем, v – проекция скорости, с которой движется источник, на ось системы координат, связанной с наблюдателем, c – скорость света.

Поскольку хвост кометы практически невиден можно считать, что вектор скорости кометы почти параллелен оси системы координат наблюдатель-комета и принять в расчётах, что проекция скорости примерно равна модулю скорости.

Анализируя это уравнение, мы определим направление движения кометы. По условию задачи наблюдатели регистрируют излучение с длиной волны $\lambda = 656{,}69$ нм. Эта величина больше, чем известное значение для головной линии в серии Бальмера λ_0:

$$\lambda > \lambda_0$$

Следовательно:

$$\left(1 + \frac{v}{c}\right) > 1$$

А значит:

$$\frac{v}{c} > 0$$

Вектор скорости кометы совпадает по направлению с осью системы координат, следовательно, комета удаляется от наблюдателя.

Определим модуль скорости v, используя закон Доплера:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Деля левую и правую части уравнения на λ_0 и вычитая 1, получаем:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{v}{c}$$

Отсюда получаем расчётную формулу для v:

$$c\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = v$$

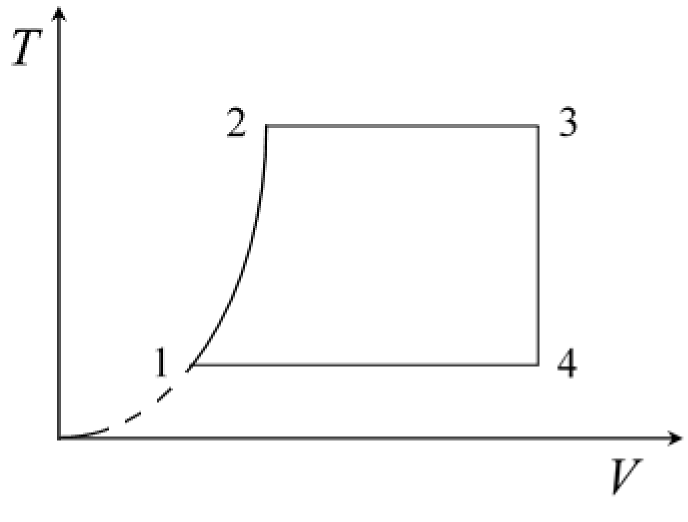
Далее подставим данные из условия задачи, при этом в расчётах будем использовать округлённое значение для скорости света $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Все величины необходимо перевести в СИ.

$$v \approx 3 \cdot 10^8 \frac{(656{,}69 - 656{,}47) \cdot 10^{-9}}{656{,}47 \cdot 10^{-9}} \approx 0{,}001 \cdot 10^8 =\cdot 10^5 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ: комета C/2024 M45 удаляется от наблюдателей на орбитальной станции со скоростью примерно $100 \ \frac{\text{км}}{\text{с}}$, для удобства записи мы перевели скорость в $\frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Задание 2 (вариант 1)

Один моль идеального газа совершает циклический процесс 1-2-3-4-1 изображённый на рисунке. На участке 1-2 температура газа меняется по закону $T = \alpha V^2$, при этом газ нагревается от температуры $T_1 = 200\ K$ до температуры $T_2 = 400\ K$. Определите какую работу совершает газ на участке 1-2.



Решение

Работу, совершаемую идеальным газом при расширении, можно определить, вычислив площадь под графиком процесса. В координатах *T*-*V* для участка 1-2 циклического процесса мы получаем сложную фигуру, поэтому давайте попробуем перерисовать этот рисунок в координатах p-V. Для этого преобразуем уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

Используя закон изменения $T(V)$ из условия задачи:

$$pV = \frac{m}{M}R\alpha V^2$$

Разделим левую и правую части уравнения на V:

$$p = \frac{m}{M}R\alpha V$$

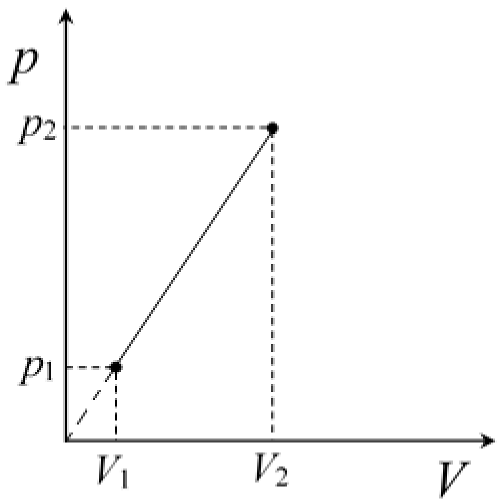
$$\frac{m}{M}R\alpha = Const$$

$$p \sim V$$

или:

$$\frac{p}{V} = Const$$

Мы получили, что давление газа прямо пропорционально объёму, занимаемого газом в этом процессе, соответственно на графике в координатах p-V, вместо параболы 1-2, как было на рисунке в условии задачи, мы нарисуем прямую линию.



Тогда для вычисления работы нам необходимо определить площадь прямоугольной трапеции.

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_2 - p_1V_1 + p_2V_2 - p_2V_1)$$

Учитывая, что:

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2} \Rightarrow p_1V_2 = p_2V_1$$

Получим:

$$A = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$$

Заменяя pV и учитывая, что по условию задачи $\frac{m}{M} = 1$ получим расчётную формулу для работы:

$$A = \frac{R}{2}(T_2 - T_1)$$

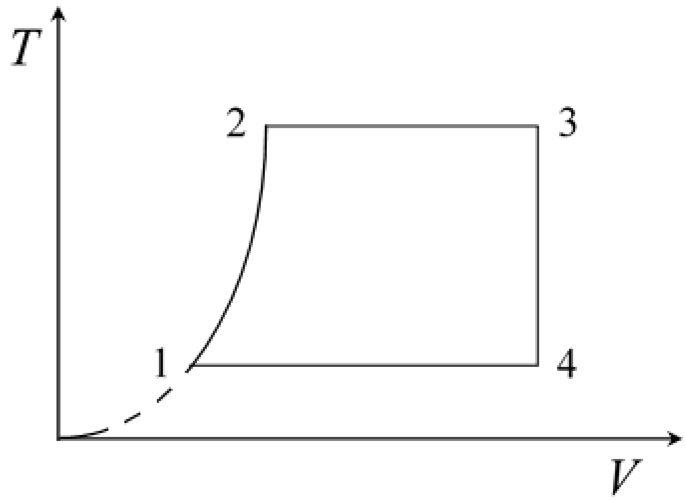
Подставим числа из условии задачи (все величины необходимо перевести в СИ) и значение для $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{К·моль}}$ получим:

$$\text{А} = \frac{1}{2} \cdot 8{,}31(400 - 200) = 831\ \text{Дж}$$

Ответ: 831 Дж

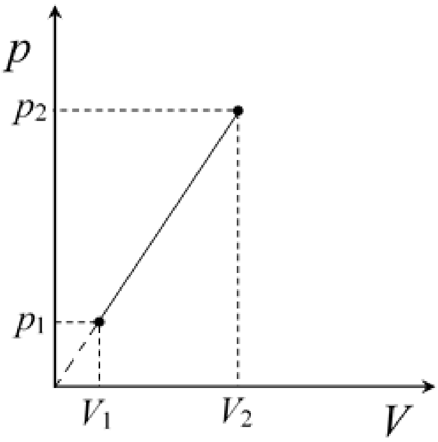
Задание 2 (вариант 2)

Один моль идеального газа совершает циклический процесс 1-2-3-4-1 изображённый на рисунке. На участке 1-2 температура газа меняется по закону $T = \alpha V^2$, где $\alpha = 250\ \frac{\text{К}}{\text{м}^6}$, при этом газ расширяется от объёма $V_1 = 10$ л до $V_2 = 50$ л. Определите какую работу совершает газ на участке 1-2.



Решение

Работу, совершаемую идеальным газом при расширении, можно определить, вычислив площадь под графиком процесса. Для этого изобразим участок 1-2 циклического процесса в координатах p-V.



Для этого преобразуем уравнение состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

Используя закон изменения $T(V)$ из условия задачи, получим:

$$pV = \frac{m}{M}R\alpha V^2$$

Отсюда:

$$p = \frac{m}{M} R\alpha V$$

Так как $\frac{m}{M} R\alpha = Const$, то:

$$p \sim V.$$

То есть для вычисления работы нам необходимо определить площадь прямоугольной трапеции.

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$$

Подставив p_1 и p_2, учитывая, что по условию задачи $\frac{m}{M} = 1$:

$$p_1 = R\alpha V_1$$

$$p_2 = R\alpha V_2$$

Получим выражение для работы:

$$A = \frac{1}{2}(R\alpha V_1 + R\alpha V_2)(V_2 - V_1)$$

И далее:

$$A = \frac{1}{2} R\alpha (V_1 + V_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2} R\alpha (V_2^2 - V_1^2)$$

Подставим данные из условия задачи (все величины необходимо перевести в СИ) и значение для $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{К·моль}}$ и получим

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 250(25 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-4}) \approx 2{,}5\ \text{Дж}$$

Ответ: 2,5

Задание 3.

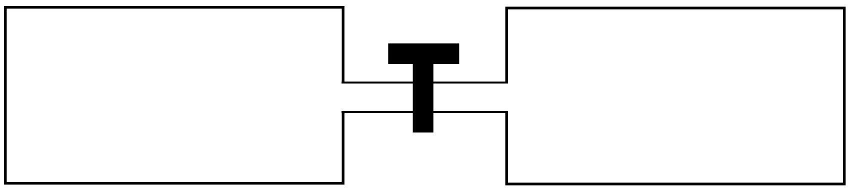
Два сосуда, содержащие различные газы по одному киломолю в каждом, соединены трубкой с краном. Давления в сосудах p_1=120 кПа и p_2=240 кПа.

Какое давление устанавливается после открытия крана? Объёмом трубки можем пренебречь по сравнению с объёмами сосудов, во время процесса температура газа не изменяется.

Решение

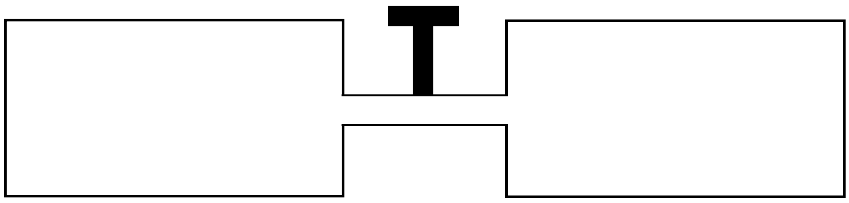
Параметры термодинамической системы до открытия крана:

p_1, V_1, T $\qquad\qquad$ p_2, V_2, T



Параметры термодинамической системы после открытия крана:

$p, V_1 + V_2, T$ $\qquad\qquad$ $p, V_2 + V_1, T$



Запишем уравнения состояния системы до и после открытия крана

$$\left.\begin{aligned} &p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT &&(1)\\ &p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT &&(2)\\ &p \cdot (V_1 + V_2) = 2 \cdot \frac{m}{\mu} RT &&(3) \end{aligned}\right\}$$

Приравняв уравнения (1) и (2), получим, что:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Преобразуем полученное выражение к виду:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} \, (*)$$

При этом сложив эти уравнения (1) и (2), получим:

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 = 2 \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT$$

Так как равны правые части получившегося равенства и уравнения (3), то равны и их левые, то есть можно записать:

$$p_1V_1 + p_2V_2 = p \cdot (V_1 + V_2)$$

Выразим искомое давление p:

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби справа на V_2, тогда:

$$p = \frac{p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} + p_2 \frac{V_2}{V_2}}{\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_2}{V_2}}$$

С учетом выражения (*) окончательно получим расчетную формулу:

$$p = \frac{p_1 \frac{p_2}{p_1} + p_2}{\frac{p_2}{p_1} + 1} = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}$$

Подставим значения указанные в условии задачи, переведенные в систему СИ и получим:

$$p = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2} = \frac{2 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 240 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^3 + 240 \cdot 10^3} = 160000\text{Па} = 160\text{кПа}$$

Ответ: после открытия крана в системе установится давление 160 кПа.

Раздел 3. Общие указания к решениям задач по химии

3.1. Области знаний по химии для подготовки к Конкурсу

Теоретическая часть конкурса содержит 4 типа заданий по химии по темам, соответствующим кодификатору контролируемых требований к проверяемым умениям:

1. Знание классификации химических реакций: - соединения, разложения, замещения, обмена; - экзотермические, эндотермические; - окислительно-восстановительные, протекающие без изменения степени окисления; - каталитические, некаталитические; - обратимые, необратимые; - гомогенные, гетерогенные. Понимание понятия скорости химической реакции и её зависимости от различных факторов.
2. Умение решать задачи на определение массы вещества или объёма газов по известному количеству вещества, массе или объёму одного из участвующих в реакции веществ. Умение решать задачи на определение массы (объёма, количества вещества) продукта реакции, если одно из веществ дано в виде раствора с определённой массовой долей растворённого вещества.
3. Умение решать задачи на электролитическую диссоциацию электролитов в водных растворах, сильные и слабые электролиты, степень диссоциации.
4. Умение решать задачи на обратимые и необратимые реакции, химическое равновесие и его смещение под воздействием различных факторов. Принцип Ле Шателье.

Уровень сложности задач в соответствии со Спецификацией требует от участника Конкурса следующих умений:

- выбирать рациональный способ решения задачи;
- составлять схемы и уравнения реакций;
- дополнять условия задачи справочными данными (молярный объем, молярные массы, число Авогадро и т.д.);
- рассчитывать количество вещества, число атомов/молекул, массу и объем;

- рассчитывать массовую долю вещества в растворе;
- рассчитывать константу равновесия реакции;
- рассчитывать степень диссоциации;
- решать алгебраические уравнения;
- анализировать полученный результат.

3.2. Разбор решений заданий по химии демонстрационного варианта

Задание 1.

Из предложенного перечня выберите все суждения, которые справедливы для реакции взаимодействия кальция с азотом. В ответ приведите последовательность цифр.

1) увеличение давления не влияет на скорость реакции
2) увеличение концентрации кальция увеличивает скорость
3) относится к гетерогенным реакциям
4) экзотермическая реакция
5) измельчение кальция изменяет скорость реакции
6) является окислительно-восстановительной реакцией

Теория

Для решения данного задания, во-первых, необходимо знать и уметь применять разные классификации химических реакций.

1. По числу и составу исходных веществ (реагентов) и продуктов реакции делятся на реакции соединения, разложения, замещения и обмена.
2. По признаку обратимости: обратимые и необратимые.

Обратимые химические реакции – это химические реакции, одновременно протекающие в прямом и обратном направлениях в одних и тех же условиях.

Необратимые химические реакции – это химические реакции, протекающие в одном направлении до полного превращения реагирующих веществ в продукты реакции.

3. По признаку однородности системы: гомогенные и гетерогенные.

Гомогенными называют химические реакции, протекающие в однофазной системе. Гомогенные реакции протекают во всем объеме системы, т.е. в газовых смесях и растворах.

Гетерогенные – химические реакции в системах, состоящих из двух или большего количества фаз. Гетерогенные реакции протекают на поверхности раздела фаз, где частицы реагирующих веществ могут соприкасаться друг с другом.

4. По признаку изменения степеней окисления атомов: окислительно-восстановительные и не окислительно-восстановительные.

Окислительно-восстановительные реакции (ОВР) – это химические реакции, которые протекают с изменением степеней окисления атомов, входящих в состав реагирующих веществ.

5. По присутствию или отсутствию катализатора: каталитические и не каталитические.

6. По знаку теплового эффекта: экзотермические и эндотермические.

Экзотермическая реакция – термохимическая реакция, протекающая с выделением теплоты(+Q).

Эндотермическая реакция – термохимическая реакция, протекающая с поглощением теплоты(-Q).

Во-вторых, для решения необходимо понимать понятие скорости реакции и знать ее зависимости от различных факторов.

Скорость химической реакции определяется изменением концентраций реагирующих веществ (исходных или продуктов реакции) в единицу времени.

Факторы, влияющие на скорость реакции:

1. природа реагирующих веществ;
2. концентрации исходных веществ;
3. температура;
4. давление;
5. присутствие катализатора / ингибитора

На скорость **гетерогенных** реакций дополнительно влияет: площадь поверхности раздела между фазами.

Ответ: 3, 4, 5, 6

Задание 2.

Калий массой 19,5 г растворили в избытке воды. Какой объем (мл) 10% раствора соляной кислоты потребуется для нейтрализации полученного раствора? Плотность раствора принять равной 1,05 г/мл, а атомную массу хлора 35,5. Ответ округлить до десятых.

Решение

Запишем протекающие уравнения химических реакций

$$2K + 2H_2O = 2KOH + H_2 \quad (1)$$

$$KOH + HCl = KCl + H_2O \quad (2)$$

$$\mathrm{n(K)} = \frac{\mathrm{m(K)}}{\mathrm{M(K)}} = \frac{19{,}5\ \text{г}}{39\ \text{г/моль}} = 0{,}5\ \text{моль}$$

По уравнению реакции (1) n(K)= n(KOH), следовательно n(KOH) =0,5 моль.

По уравнению реакции (2) n(KOH)=n(HCl), следовательно n(HCl) =0,5 моль.

Следовательно:

$$m(HCl) = n(HCl)\cdot M(HCl) = 0{,}5\ \text{моль}\cdot 36{,}5\ \text{г/моль} = 18{,}25\ \text{г.}$$

Найдем массу раствора соляной кислоты

$$\omega(\mathrm{HCl}) = \frac{\mathrm{m(HCl)}}{\mathrm{m(р-ра)}}\cdot 100\%$$

Отсюда

$$m(р-ра) = \frac{m(HCl)}{\omega(HCl)}\cdot 100\% = \frac{18{,}25\ \text{г.}}{10\%}\cdot 100\% = 182{,}5\ \text{г.}$$

Исходя из плотности раствора найдем объём раствора соляной кислоты

$$\rho\ (р-ра) = \frac{m(р-ра)}{V(р-ра)}$$

Отсюда $V\ (р-ра) = \frac{m(р-ра)}{\rho(р-ра)} = \frac{182{,}5\ \text{г}}{1{,}05\ \text{г/мл}} = 173{,}8\ \text{мл}$

Ответ: 173,8

Задание 3.

Раствор неизвестной кислоты, объемом 20 мл содержит $3{,}6 \cdot 10^{19}$ растворенных частиц. Рассчитайте степень диссоциации (%) данной кислоты в 0,15 М растворе. Сильным или слабым электролитом является эта кислота? Ответ округлить до целого. Число Авогадро принять равным $6{,}02 \cdot 10^{23}$.

Решение

Найдем количество моль кислоты, исходя из молярной концентрации раствора и объема раствора.

$$\mathrm{C(к-ты)} = \frac{\mathrm{n(к-ты)}}{\mathrm{V(р-ра)}}$$

Так как молярная концентрация измеряется в моль/л, то объем необходимо перевести в литры. Отсюда $n(\text{к}-\text{ты}) = \mathrm{C(к-ты)} \cdot \mathrm{V(р-ра)} = 0{,}15\,\frac{\text{моль}}{\text{л}} \cdot 0{,}02\ \text{л} = 0{,}003\ \text{моль}$

Рассчитаем общее число молекул кислоты в найденном количестве моль

$$n(\text{к}-\text{ты}) = \frac{N}{N_a}$$

Отсюда N = $n(\text{к}-\text{ты}) \cdot N_a = 0{,}003 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}8 \cdot 10^{21}$частиц

Рассчитаем степень диссоциации, исходя из того, что степень диссоциации – это отношение числа молекул распавшихся на ионы к общему числу растворенных молекул.

$$\alpha = \frac{\mathrm{N'}}{\mathrm{N}} \cdot 100\% = \frac{3{,}6 \cdot 10^{19}}{1{,}8 \cdot 10^{21}} \cdot 100\% = 2\%$$

Если степень диссоциации меньше 3%, то электролит является слабым.

Ответ: 2% слабым

Задание 4.

Определите равновесную концентрацию угарного газа (моль/л) в реакции ZnO(т) + CO(г) $\rightleftarrows$ Zn(т) + CO_2(г) , если начальные концентрации угарного и углекислого газов равны 0,8 и 0,1 моль/л соответственно.

Константа равновесия при некоторой температуре данной реакции составляет 0,5.

Решение

Примем $\Delta c(CO)$ = x моль/л, тогда $\Delta c(CO_2)$ = x моль/л, так как по уравнению реакции количество угарного газа относится к количеству углекислого газа как 1:1.

Концентрации, моль/л	**CO**	**CO_2**
c_0	0,8	0,1
Δc	x	x
[C]	0,8-x	0,1+x

Тогда

$K_{равн} = \frac{[CO_2]}{[CO]}$ =0,5

$K_{равн} = \frac{0,1+x}{0,8-x}$ =0,5

Решая уравнение, находим X =0,2

Тогда равновесная концентрация угарного газа [CO]=0,8-0,2 = 0,6 моль/л

Ответ: 0.6

Список литературы

По математике

1. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту/15-е издание, исправленное и дополненное) Москва: МЦНМО, 2008, 1024 с.

По физике

1. Яворский, Б. М. Основы физики: учебник : в 2 т. Том 1. Механика. Молекулярная физика. Электродинамика / Б. М. Яворский, А. А. Пинский ; под. ред. Ю. И. Дика. - 5-е изд., стер. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 576 с.
2. Ландсберг, Г. С. Оптика : учебное пособие для вузов / Г. С. Ландсберг. - 7-е изд., стер. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2017. - 852 с.
3. Яворский, Б. М. Основы физики: учебник : в 2 т. Том 2. Колебания и волны. Квантовая физика. Физика ядра и элементарных частиц / Б. М. Яворский, А. А. Пинский ; под. ред. Ю. И. Дика. - 5-е изд., стер. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 552 с.

По химии

1. Глинка Н.Л. Общая химия. 30-е изд., испр. - М.: 2003 - 728с.
2. Кузьменко Е.В., Еремин В.В., Попков В.А. Начала химии.– 7-е изд., перераб. и доп. - М.: 2002. Том 1 - 384с.; Том 2 - 384с.
3. Хомченко Г.П. Пособие по химии для поступающих в ВУЗы. - 4-е изд., испр. и доп. - М.: Новая волна, 2002. - 480с.
4. Коровин Н.В. Общая химия. Учебник. - М.: 2002, - 558 с.