Методические рекомендации к выполнению конкурсных заданий
теоретического этапа
Московского конкурса межпредметных навыков и знаний
«Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»
в номинации **«Инженерный класс»**
для направления «Авиастроительные классы»

Москва, 2024 г.

Оглавление

1. Предмет «математика»

Задание 1

«Задание на исследование функций, заданных графиками»

При исследовании различных процессов мы часто сталкиваемся с различными зависимостями между величинами. Для исследования подобных зависимостей с точки зрения математики необходимо понятие функции. Оно является одним из важнейших во всей математике, а также используется во всех естественнонаучных дисциплинах. Одним из способов задания функции является графический способ. Он предполагает, что нарисован график (линия или набор линий на координатной плоскости), с помощью которого можно установить связь между величинами.

Для решения задачи необходимо владеть понятиями аргумент функции, значение функции, уметь по данному графику определять значение функции, соответствующее данному значению аргумента и наоборот. Также необходимо уметь вычислять значения функций и аргумента функции в случае задания функции с помощью формул.

Рассмотрим задачу демоварианта.

Для питания беспилотного летательного аппарата используется аккумуляторная батарея.

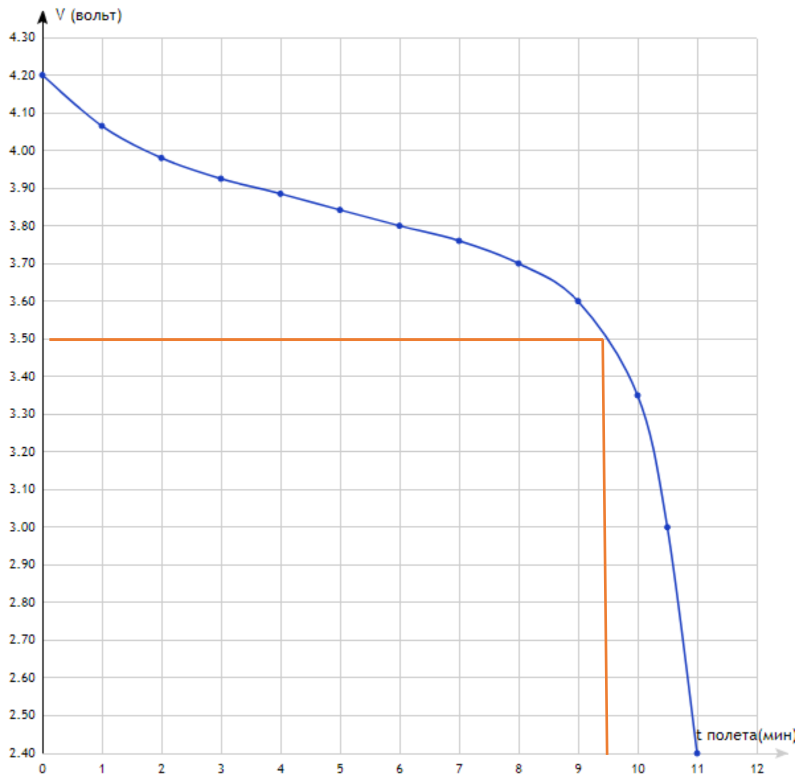


График №1

На первом графике изображено изменение напряжения батареи в зависимости от времени полёта. На втором графике изображено изменение напряжения батареи в зависимости от падения емкости аккумулятора.

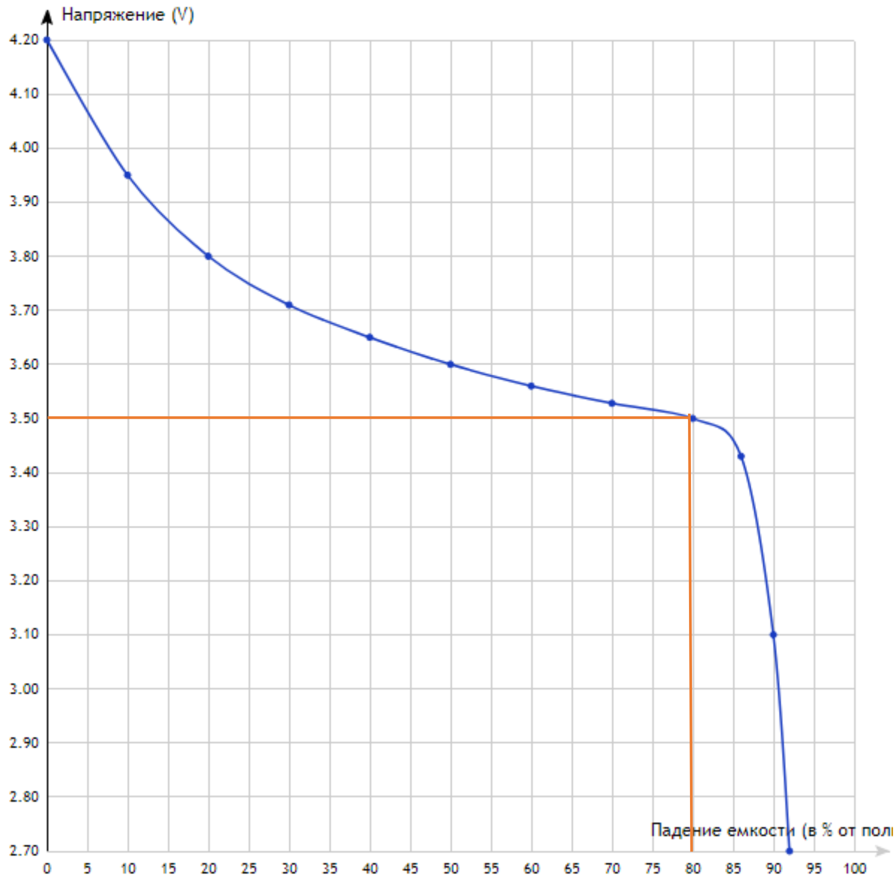


График №2

Чтобы избежать аварии, связанной с нехваткой энергии батареи, необходимо завершить полёт, когда остаточная ёмкость аккумулятора составляет не менее 20% от первоначальной. Определите примерное максимальное время полета при данных характеристиках батареи.

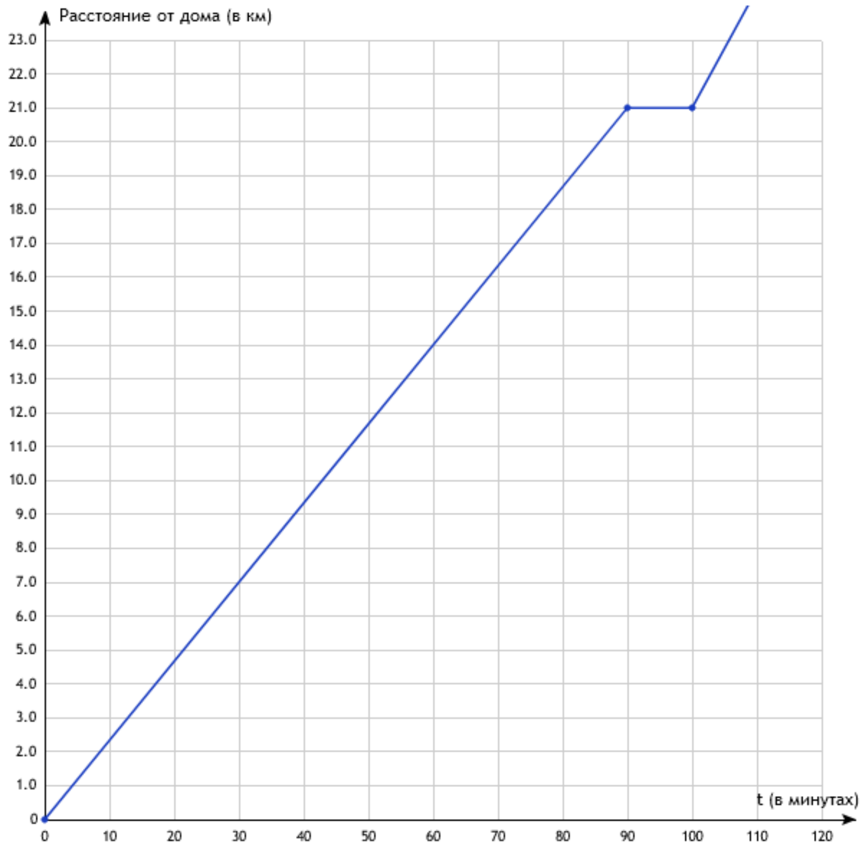
1. 6 минут
2. 7,5 минут
3. 9,5 минут
4. 10 минут

Методические рекомендации по решению задания 1

Для решения задачи необходимо понять, что по оси абсцисс на графике №2 отложено именно падение емкости батареи, то есть, на сколько процентов разрядилась батарея. Так как по условию остаточная ёмкость должна быть не меньше 20%, падение напряжение должно составить не более 80%. По графику №2 находим значение напряжения, соответствующее значению 80% - оно равно 3,5 вольта (показано на рисунке). На графике №1 показана зависимость напряжения от времени, то есть необходимо найти значение аргумента (время полёта), соответствующее значению напряжения 3,5 вольта. Это значение, примерно, равно 9,5 минут, что соответствует ответу №3.

Рассмотрим ещё одну задачу похожего содержания

Петя поехал на велосипеде из дома на станцию, чтобы встретить бабушку. Если бы он двигался с первоначальной скоростью, то доехал бы ровно за два часа, но по дороге у него спустило колесо, и он потратил некоторое время, чтобы устранить неисправность. На рисунке изображён график движения Пети (график изображен не полностью). С какой скоростью должен ехать Петя после устранения поломки, чтобы успеть ровно к приезду бабушки? Ответ запишите в км/ч.



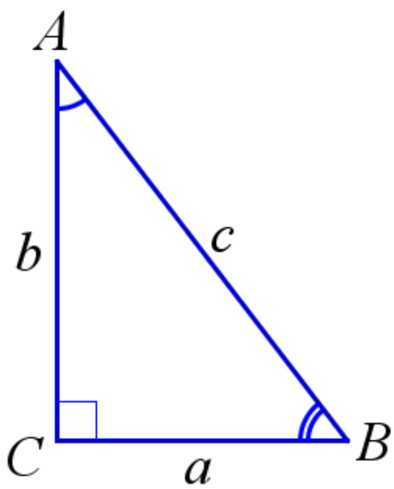
По графику определим, что до момента поломки Петя проехал 21 километр за 90 минут, то есть за 15 часа, следовательно, его скорость равна $v = \frac{S}{t} = \frac{21}{1,5} = 14$ (км/ч).

Так как предполагаемое время пути равнялось два часа, расстояние, которое должен был проехать Петя равно 28 км. По графику определим, что остановка заняла 10 минут (расстояние не менялось и график параллелен оси абсцисс). Значит оставшиеся 7 километров Петя должен проехать за 20 минут, что составляет $\frac{1}{3}$ часа. Скорость, с которой теперь должен двигаться Петя снова найдём по формуле

$$v = \frac{S}{t} = \frac{7}{\frac{1}{3}} = 21\ (\text{км/ч}).$$

Задание 2

«Задание на вычисление элементов треугольника с использованием тригонометрических функций»



1. Тригонометрические функции острого угла.

1. Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

sin A = a/c; sin B = b/c.

2. Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

cos A = b/c; cos B = a/c.

3. Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

tg A = a/b; tg B = b/a.

4. Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему:

ctg A = b/a; ctg B = a/b.

Значения тригонометрических функций угла равны значениям соответствующих кофункций угла, дополняющего его до 90 градусов:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B \qquad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B$$

Тангенс и котангенс связаны с остальными тригонометрическими функциями следующими соотношениями:

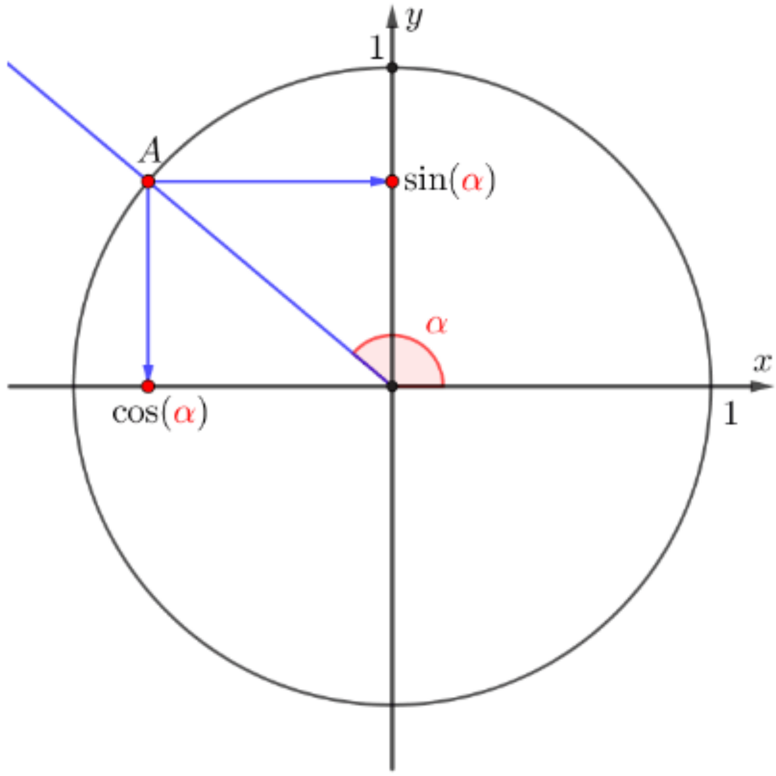
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

2. Тригонометрические функции произвольного угла.

Для произвольного (не обязательно остроугольного) треугольника значения тригонометрических функций определяются с помощью *тригонометрической окружности*:

Луч OA повёрнут на угол α относительно положительного направления оси OX против часовой стрелки, тогда точка A имеет координаты (sin α; cos α) (угол α может быть даже отрицательным!). Это определение согласовано с определениями тригонметрических функций острого угла, введёнными через отношения сторон прямоугольного треугольника.



3. Основное тригонометрическое тождество.

Из уравнения окружности следует основное тригонометрическое тождество, связывающее синус и косинус одного угла:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

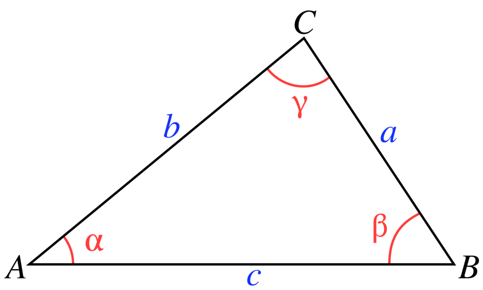
Поделив это тождество на квадрат синуса или косинуса, получаем следствия для тангенса и котангенса:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha;$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

3. Теоремы синусов и косинусов.

Длины сторон треугольника и значения тригонометрических функций его углов связаны следующими теоремами:



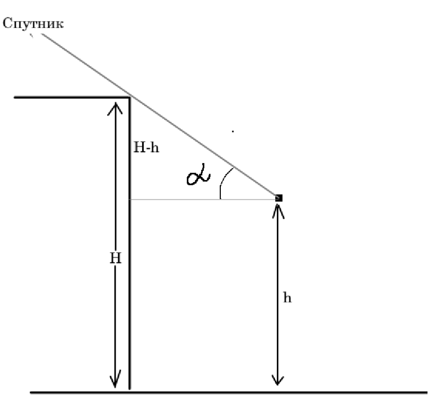
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ (теорема синусов)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \text{ (теорема косинусов)}$$

Рассмотрим задачу демоварианта.

Квадрокоптер во время полёта должен поддерживать связь с геостационарным спутником. Спутник виден под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту в направлении на юг. На какое минимальное расстояние квадрокоптер может приблизиться с севера к стене здания высотой H=42 м, если максимально допустимая высота полёта квадрокоптера составляет h=20м? Дайте ответ в метрах и округлите до целого числа.

Решение задания 2



1) H-h = 42 - 22 = 22 (м) — высота, на которую крыша здания выше положения квадрокоптера

2) $tg\alpha = \frac{H-h}{x}$, где x — минимальное расстояние до стены здания, отсюда:

3) $x = \frac{H-h}{tg\alpha} = 22\sqrt{3} = 38{,}1\ ...$(м).

Ответ: 38 метров.

Задание 7

«Задание на комбинаторику»

Правила и основные формулы комбинаторики

<u>*Правило произведения:*</u> Если объект *A* можно выбрать *n* способами, а после каждого такого выбора другой объект *B* можно выбрать (независимо от выбора объекта *A*) *m* способами, то упорядоченную пару объектов *(A;B)* можно выбрать *m·n* способами.

<u>*Правило суммы*</u>: Если объект *A* можно выбрать *n* способами, а другой объект *B* можно выбрать *m* способами, то выбор «либо *A*, либо *B»* можно осуществить *m+n* способами.

Следует отметить, что при применении правила суммы необходимо, чтобы ни один из способов выбора объекта *A* не совпадал ни с одним из способов выбора объекта *B.*

Кроме этих двух основных правил в комбинаторных задачах часто встречаются некоторые стандартные выборки: перестановки, сочетания, размещения. Несмотря на то, что они являются прямыми следствиями основных правил, полезно знать определения этих выборок и соответствующие им формулы. Все эти выборки могут рассматриваться как с повторяющимися элементами, так и без повторений. Рассмотрим выборки без повторений элементов.

– Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов – наиболее часто встречающаяся в прикладных задачах выборка, используется в случае, когда необходимо рассчитать, сколькими способами можно из множества, содержащего *n* элементов, выбрать *k* элементов, <u>*не учитывая*</u> в каком порядке будет осуществляться выбор. Число способов осуществит подобный выбор обозначается C_n^k, вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Например, если нам нужно посчитать, сколькими способами из 7 пловцов, занимающихся в секции, можно выбрать 4-х для участия в соревнованиях, то это легко сделать, используя формулу для числа сочетаний:

$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{4!\cdot5\cdot6\cdot7}{4!\cdot3!} = \frac{5\cdot6\cdot7}{2\cdot3} = 35$ способами.

Значит, выбрать пловцов можно 35 способами.

– Размещения без повторений из *n* элементов по *k* элементов. Используется в случае, когда необходимо рассчитать, сколькими способами можно из множества, содержащего *n* элементов, выбрать *k* элементов, *учитывая* в каком порядке будет осуществляться выбор. Число способов осуществить такой выбор обозначается A_n^k, и вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Если нужно посчитать сколькими способами из 7 пловцов, занимающихся в секции, можно составить команду из 4-х для участия в комбинированной эстафете (где каждый спортсмен плывет своим стилем), то, используя формулу числа размещений, получим:

$\mathrm{A}_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{3!\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{3!} = 4\cdot5\cdot6\cdot7 = 840$ способами.

Попробуйте понять, в чем различие между двумя внешне похожими условиями, и почему в каждом из случаев применяется соответствующая формула.

– Перестановки. Используется для вычисления числа способов переставить местами элементы множества, содержащего n элементов. Число перестановок обозначается P_n, вычисляется по формуле $P_n = n!$

Рассмотрим применения формулы на следующем примере:

Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1; 2; 3; 4, если каждую цифру можно использовать только один раз?

В данном случае речь как раз идёт о перестановке множества из 4-х элементов. Число таких перестановок, и, следовательно, искомое количество чисел

Рассмотрим задачу демоварианта.

На поляне 6 гномов, 5 эльфов и 3 хоббита создавали Верховный Хурал из пяти членов с условием, чтобы ни у какого из народов не было в нём большинства. Сколько вариантов такого Хурала может быть?

Решение задания 7

В Хурале должны быть представители всех народов в количестве не более двух.

Возможны три варианта: а) 2 гнома, 2 эльфа, 1 хоббит; б) 2 гнома, 1 эльф, 2 хоббита; в) 1 гном, 2 эльфа, 2 хоббита. Для каждого случая количество вариантов вычисляется как произведение числа вариантов выбрать представителя от каждого из народов. В свою очередь число способов выбрать представителя от одного из народов равно числу сочетаний $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Например, число способов выбрать двух гномов из 6 гномов равно $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2!4!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$. Аналогично определяются остальные необходимые значения

а) $C_6^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 = 15 \cdot 10 \cdot 3 = 450$; б) $C_6^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2 = 15 \cdot 5 \cdot 3 = 225$; в) $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = 6 \cdot 10 \cdot 3 = 180$.

Общее количество вариантов равно сумме 450 + 225 + 180 = 855.

Задание 8

«Задание на выбор наилучшего варианта (экстремальная задача)»

Экстремальные задачи – это задачи на достижение наилучшего результата, нахождение наибольшего или наименьшего значения некоторой величины. При решении таких задач могут использоваться различные методы, изучаемые в рамках школьного образования: метод перебора, метод оценок, использование свойств функций, геометрические методы и др. В рамках данного материала мы рассмотрим наиболее часто используемый метод – аналитический с использованием методов математического анализа.

При использовании этого метода можно выделить следующие основные этапы решения:

1. Необходимо выбрать и ввести переменную величину, через которую впоследствии выразить остальные величины, использующиеся в задаче. При выборе переменной необходимо указать её область определения, которая зависит как от физических свойств (например, положительность скорости, длины итд), так и от конкретных условий задачи (например высота треугольника не может быть больше сторон, заключающих эту сторону)

2. По смыслу задачи строим целевую функцию (иногда ее называют опорной функцией), зависящую от введенной переменной, для которой необходимо найти наибольшее (наименьшее) значение при заданных условиях. Если нужно найти наибольший объём, то целевая функция – это объём и т.д.

3. Методами математического анализа исследуем целевую функцию на экстремум. Если требуемый по условию задачи экстремум не входит в область определения переменных, то исследуем целевую функцию на наибольшее (наименьшее) значение на указанном промежутке. Обратите внимание, что при определении экстремума в обязательном порядке необходимо определить его вид (максимум или минимум).
4. При записи ответа, лишний раз обратите внимание на вопрос, поставленный в задаче, чтобы ответить именно на него.

Примеры:

Задача 1. Прямоугольный лист жести имеет линейные размеры 5 м и 8 м. В четырех его углах вырезают одинаковые квадраты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова наибольшая вместимость полученной коробки?

Решение. Пусть $x \in (0\,;2{,}5)$ - сторона вырезаемых квадратов. Ограничение на x определяются положительностью длины стороны квадрата и условием, что сумма двух сторон квадратов должна быть меньше стороны исходного прямоугольника. Тогда два других измерения параллелепипеда будут равны $(5-2x)$ и $(8-2x)$. В данной задаче целевая функция это объем полученной коробки.
$V(x) = x(5-2x)(8-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$, при $x \in (0\,;2{,}5)$
Исследуем целевую функцию:
Найдём производную и приравняем к нулю, чтобы найти критические точки: $V' = 12x^2 - 52x + 40 = 0$. Корни этого уравнения: $x = 1$ и $x = 10/3$. Второй корень не входит в область определения переменной. Знаки производной показывают, что первый корень – точка максимума целевой функции. Получившийся наибольший объем равен 18 м^2.

Задача 2. Часть оконного проема в виде полукруга радиусом 2 м планируют заложить так, чтобы оно получилось в форме прямоугольника. Какая наибольшая площадь окна может получиться в этом случае?

Решение. Пусть размеры полученного окна будут: $x\epsilon(0\,;2)$, $y\epsilon(0\,;4)$ (высота и ширина). Целевая функция – площадь полученного окна: $S = xy$. Геометрия задачи позволяет сформулировать дополнительное условие: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$ или $y = \sqrt{16-4x^2}$. Тогда целевая функция имеет вид: $S = x\sqrt{16-4x^2}$. Исследуем эту функцию: $S' = \sqrt{16-4x^2} - x\frac{8x}{2\sqrt{16-4x^2}} = 0$. Положительный корень этого уравнения:

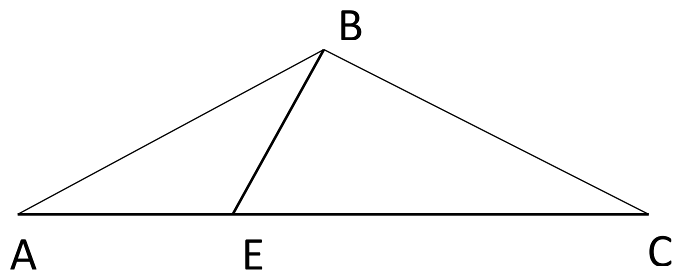
$x = \sqrt{2}$. Знаки производной показывают, что это точка максимума целевой функции. Тогда $y = 2\sqrt{2}$, а искомая площадь - $S = 4$ м^2.

Разбор задачи демоварианта:

Рассмотрим задачу демоварианта.

В вершине равнобедренного треугольника с боковой стороной 100 м и углом при вершине 120° находится Стрелок, охраняющий Дерево познания Добра и Зла, которое находится в одной из вершин при основании треугольника. Из норы, расположенной в другой вершине при основании, выполз Змей и прямиком пополз к Дереву со скоростью 10 м/с. Увидев это, Стрелок, мгновенно выстрелил в направлении предполагаемого положения Змея на основании треугольника. С какой минимальной скоростью (в метрах в секунду) Стрелок должен выпустить стрелу, чтобы поразить Змея?

Решение задания 8



На рисунке схематически изображены положения: стрелок в точке B, змей - в точке C, дерево – в точке A, место поражения змея стрелой - в точке E. Углы треугольника по условию равны 120^0, 30^0 и 30^0. Запишем теорему косинусов для треугольника EBC:

$$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2BC \cdot BE \cdot cos30^0$$

Пусть V - скорость стрелы, а t – время до поражения змея, тогда по рисунку

$BE^2 = (V*t)^2 = 10000+(10t)^2-2\cdot100\cdot10t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Выразим из этой формулы V^2:

$V^2=10000/t^2 + 100 - 1000\sqrt{3}/t$. Для отыскания экстремума (минимума) этой функции найдем ее производную:

$-20000/t^3 + 1000\sqrt{3}/t^2$. Производная равна нулю при $t=20/\sqrt{3}$. Исследование показывает, что это значение – точка минимума. Подсчитываем, что в этой точке $V^2=25$, соответственно минимальное значение скорости стрелы равно: $V=5$.

2. Предмет «физика»

Задание 3

Скорость взлета самолета Sukhoi Superjet SSJ-100 равна 300 км/ч, длина разбега 1730 м. Какая частота вращения колеса шасси будет после прохождения половины пути разбега, если диаметр колеса равен 1048 мм. Ответ выразите в оборотах в секунду и округлите до целого значения, число π примите равным 3,14.

Решение задания 3

Движение колеса шасси самолета при разбеге по взлетной полосе можно рассматривать, как поступательное и вращательное. При этом движение прямолинейное равноускоренное.

Для расчета характеристик такого вида движения применяются следующие формулы.

Пройденный путь: $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, скорость колес: $v = v_0 + at$, где

- v_0 начальная скорость (v_0 = 0), t - время движения, a - ускорение.

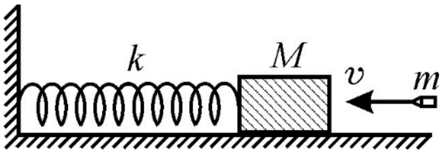
Выражаем $a = \frac{v^2}{2S}$, $v = \sqrt{2aS}$. Скорость колеса после прохождения половины пути $v_{1/2} = \sqrt{2\frac{S}{2}a} = \sqrt{\frac{Sv^2}{2S}2} = \sqrt{v^2/2}$.

Учитывая связь скорости поступательного движения и угловой скорости $v = \omega R = \frac{\omega D}{2} = \pi\nu D$, находим частоту вращения колеса $\nu = \frac{v}{\pi D\sqrt{2}}$.

$$\nu = \frac{300000}{3600 \cdot 3.14 \cdot 1{,}048 \cdot \sqrt{2}} = 17{,}9 \ \approx 18 \text{ об/с}$$

Необходимо обратить внимание, что скорость перед подстановкой значений следует перевести в систему СИ.

Задание 4



На гладкой горизонтальной поверхности лежит брусок массой *M*, прикрепленный к стене невесомой пружиной жесткостью *k*. В центр бруска попадает пуля массой *m*, летящая горизонтально вдоль оси пружины, и застревает в нем. Определите скорость пули *v*, если максимальное сжатие пружины после удара составило Δl. Трением бруска о поверхность пренебречь. Выберите верный ответ.

Решение задания 4

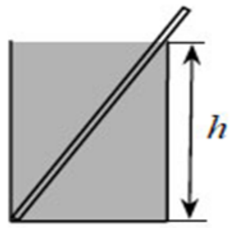
Поскольку соударение пули с бруском является кратковременным, смещение бруска за время соударения пренебрежимо мало, и сила упругости в момент соударения не возникает. Следовательно, суммарный импульс пули и бруска во время соударения сохраняется: $mv = (M+m)u,$ где u – скорость бруска с застрявшей в нем пулей сразу после соударения.

При последующем движении бруска и пули сохраняется механическая энергия, причем при достижении максимального сжатия пружины брусок с пулей останавливается. Следовательно, $\frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{k\Delta l^2}{2}$.

Выразив *u* из закона сохранения импульса, подставляем в закон сохранения энергии и выражаем *v*.

$$v = \frac{\Delta l}{m}\sqrt{(M+m)k}$$

Задание 9



Однородную палочку длиной 14 см и массой 150 г поставили в гладкий сосуд высотой h = 8 см и радиусом R = 3 см. Стакан доверху наполнили жидкостью, плотность которой в k = 2,4 раза меньше плотности материала палочки. С какой силой палочка давит на край стакана? Ответ выразите в мН и округлите до целого значения. Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

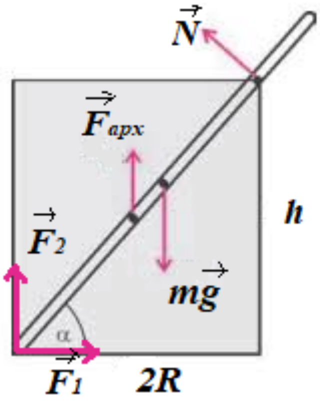
Решение задания 9

Рассмотрим задачу в системе отсчёта, связанной с Землёй. Будем считать эту систему отсчёта инерциальной (ИСО).

Считаем палочку абсолютно твёрдым телом (форма и размеры тела неизменны, расстояние между любыми двумя точками тела остаётся неизменным).

Любое движение твёрдого тела является суперпозицией поступательного и вращательного движений. Поэтому условий равновесия твёрдого тела в ИСО два:

- Равна нулю векторная сумма всех сил, приложенных к телу.
- Равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно данной оси вращения или любой другой оси, параллельной данной.



Сначала необходимо нарисовать рисунок, указав все силы, действующие на палочку: силу тяжести $m\vec{g}$, силу Архимеда $\overrightarrow{F_{\text{арх}}}$, силы реакции опоры $\vec{N}, \vec{F_1}, \vec{F_2}$. Искомая сила *F* по 3 закону Ньютона равна по модулю и противоположно направлена силе *N*.

Для устранения громоздких формул целесообразно сразу найти длину погруженной в жидкость части палочки: $l = \sqrt{h^2 + 4R^2} = 10$ см, а также косинус α: $\cos\alpha = {}^{2R}/_{l} = 0{,}6$.

Для удобства и исключения моментов сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ выберем ось, проходящую через нижний конец палочки.

Тогда, учитывая, что момент силы M определяется как произведение силы на плечо, сумму моментов можно записать так: $mg\frac{L}{2}\cos\alpha - F_{\text{арх}}R - Nl = 0$.

Стоит обратить внимание на знаки: моменты сил, стремящиеся повернуть палочку в одном определенном направлении, пишутся с одинаковым знаком, а те, которые стремятся повернуть в противоположном направлении, пишутся с противоположным знаком.

Сила Архимеда равна: $F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{пчт}} = \frac{\rho}{k} g V_{\text{пчт}} = \frac{\rho}{k} glS = \frac{m}{kLS} glS = \frac{mgl}{kL}$. При этом *ρ* – плотность палочки, *S* -площадь сечения.

Подставляем силу Архимеда в формулу и выражаем *N*:

$$N = mg\frac{L}{2l}\cos\alpha - \frac{mgR}{kL}$$

Учитываем, что *F*=*N*, подставляем значения и находим силу, с которой палочка давит на край стакана.

$$F = 0{,}15 \cdot 9{,}8\frac{0{,}14}{2 \cdot 0{,}1}0{,}6 - \frac{0{,}15 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}03}{2{,}4 \cdot 0{,}14} = 0{,}48615 \text{ Н} \approx 486 \text{ мН}$$

Задание 10

Провод длиной 2,3 м и площадью сечения 1,5 мм^2 после помещения в однородное магнитное поле с индукцией 4,5 мТл растянули по периметру круглой площадки.

При этом по нему прошел заряд 3 мКл. Определите удельное сопротивление материала провода, если линии магнитной индукции перпендикулярны площадке. Ответ выразите в Ом·мм^2/м и округлите до десятых, число π примите равным 3,14.

При помещении в магнитное поле в проводнике возникает явление электромагнитной индукции. При этом модуль ЭДС индукции определяется по закону Фарадея $\varepsilon =| -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} |$

Изменение потока магнитной индукции

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS_{\text{круга}} cos\ 0^0 - 0 = \ BS_{\text{круга}} cos\ 0^0$$

Возникающий в проводнике ток подчиняется закону Ома

$I = \frac{\varepsilon}{R}$, где *R*- электрическое сопротивление $R = \rho\frac{l}{S}$, (ρ - удельное сопротивление проводника, *l* -длина проводника, *S* – площадь поперечного сечения),

I – сила тока $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

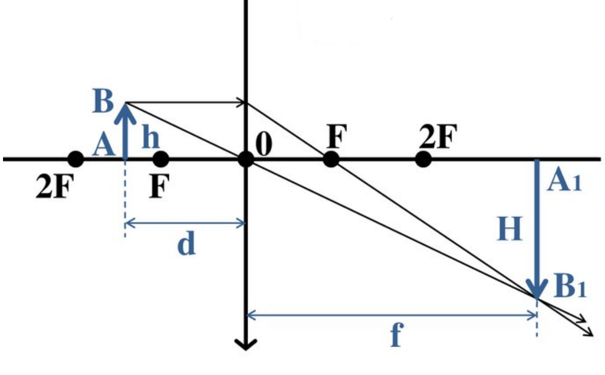
Площадь круга $S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{l^2}{4\pi}$, так как длина окружности $l = 2\pi R$.

Подставим формулы и выразим удельное сопротивление проводника

$\rho = \frac{BlS}{4\pi\Delta q} = \frac{4{,}5\cdot10^{-3}\cdot2{,}3\cdot1{,}5\cdot10^{-6}}{4\cdot3{,}14\cdot3\cdot10^{-3}}$= 0412 $\cdot$ Ом $\cdot$ мм^2/м $\sim$ 0,4 Ом $\cdot$ мм^2/м

Задание 11. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение слайда с двукратным увеличением. Слайд и плоскость экрана расположены перпендикулярно главной оптической оси. Затем линзу отодвинули от экрана на 18 см вдоль главной оптической оси линзы. После чего слайд передвинули дальше от линзы, чтобы полученное пятикратное изображение снова стало резким. Найдите фокусное расстояние линзы. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до целого значения. Выберите верный ответ.

Сначала целесообразно выполнить построение изображения в тонкой линзе. Из условия задачи можно сделать вывод, что линза является собирающей.



Далее записываем формулу тонкой линзы и увеличение линзы для начальной и для конечной ситуации.

$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}$; $\Gamma_1 = \frac{H}{h} = \frac{f_1}{d_1}$, где *H* – высота изображения, *h* - высота слайда.

После передвижений линзы и слайда формулы выглядят так:

$\frac{1}{d_1+\Delta d-\Delta f}+\frac{1}{f_1+\Delta f} = \frac{1}{F}$; $\Gamma_2 = \frac{f_2}{d_2} = \frac{f_1+\Delta f}{d_1+\Delta d-\Delta f}$.

Далее выражаем $d_1 + \Delta d - \Delta f = \frac{f_2}{\Gamma_2} = \frac{f_1+\Delta f}{\Gamma_2}$, подставляем в конечную формулу тонкой линзы и приравниваем обе формулы:

$\frac{\Gamma_1}{f_1}+\frac{1}{f_1} = \frac{\Gamma_2}{f_1+\Delta f}+\frac{1}{f_1+\Delta f} = \frac{1}{F}$.

$$F = \frac{\Delta f}{\Gamma_2 - \Gamma_1} = \frac{0{,}18}{5-2} = 0{,}06\ \text{м} = 6\ \text{см}$$

3. Предмет «информатика»

Задание 5

Дана строка, содержащая только символы (и). Необходимо определить, является ли последовательность скобок в строке сбалансированной. Строка считается сбалансированной, если каждой открывающей скобке соответствует закрывающая, и скобки правильно вложены.

Какой из предложенных алгоритмов решает эту задачу?

1) Использовать два счетчика: один для открывающих скобок, другой для закрывающих, и сравнить их значения в конце.
2) Пройти по строке и добавлять скобки в стек: добавлять при встрече (и извлекать при встрече), проверяя при этом, пуст ли стек.
3) Отсортировать строку и проверить, является ли левая часть строки открывающими скобками, а правая — закрывающими.
4) Пройти по строке и использовать очередь для хранения скобок, добавляя при встрече (и извлекая при встрече).

Краткая теоретическая справка

Проверка сбалансированности скобок

Для проверки правильности расстановки скобок обычно используется структура данных, называемая **стек**. Основное свойство стека — это принцип "последний вошел — первый вышел", что идеально подходит для задачи с вложенными структурами, такими как скобки.

Основной алгоритм:

1. Создать пустой стек.
2. Пройти по каждому символу строки:
   - Если символ — открывающая скобка “(”, добавляем её в стек.
   - Если символ — закрывающая скобка “)”, проверяем, не пуст ли стек:
     - Если стек пуст, это означает, что закрывающая скобка не имеет соответствующей открывающей — последовательность некорректна.
     - Если стек не пуст, извлекаем из стека верхний элемент. Если это открывающая скобка “(”, продолжаем работу. Если это не соответствует ожидаемому типу, последовательность некорректна.

3. В конце, если стек пуст, значит, все скобки сбалансированы. Если в стеке остались элементы, значит, открывающие скобки не имеют соответствующих закрывающих.

Пример работы алгоритма:

Пусть дана строка "(()())".

1. Проходим по строке:
   - Символ (— добавляем в стек. Стек: [( ]
   - Символ (— добавляем в стек. Стек: [(, ( ]
   - Символ) — извлекаем из стека. Стек: [( ]
   - Символ (— добавляем в стек. Стек: [(, ( ]
   - Символ) — извлекаем из стека. Стек: [( ]
   - Символ) — извлекаем из стека. Стек: []
2. Стек пуст — последовательность скобок сбалансирована.

Алгоритм с использованием стека является наиболее эффективным и корректным способом решения задачи проверки сбалансированности скобок. Он учитывает как количество скобок, так и их правильную вложенность.

Решение задания 5

Дана строка, содержащая только символы (и). Необходимо определить, является ли последовательность скобок в строке сбалансированной. Сбалансированной последовательность считается, если каждой открывающей скобке соответствует закрывающая, и при этом скобки правильно вложены.

Рассмотрим предложенные алгоритмы:

1. **Использовать два счетчика: один для открывающих скобок, другой для закрывающих, и сравнить их значения в конце.** Этот метод не подходит, так как он не учитывает порядок вложенности скобок. Например, строка “)(” будет иметь одинаковое количество открывающих и закрывающих скобок, но последовательность явно не является корректной.
2. **Пройти по строке и добавлять скобки в стек: добавлять при встрече “(” и извлекать при встрече “)”, проверяя при этом, пуст ли стек.** Это правильный метод решения задачи. Стек позволяет корректно отслеживать вложенность скобок. Мы добавляем в стек открывающие скобки и при встрече с закрывающей скобкой проверяем, есть ли в стеке соответствующая открывающая скобка. Если стек пуст, когда должна быть

извлечена открывающая скобка, или в конце стека остаются элементы, это означает, что последовательность скобок не сбалансирована.

3. **Отсортировать строку и проверить, является ли левая часть строки открывающими скобками, а правая — закрывающими.** Этот метод неверен. Сортировка не учитывает правильную вложенность скобок, и при такой проверке можно получить ложные результаты. Например, последовательность “(())” будет считаться некорректной, потому что при сортировке мы получим две открывающие скобки и две закрывающие, но они будут в неправильном порядке.
4. **Пройти по строке и использовать очередь для хранения скобок, добавляя при встрече “(” и извлекая при встрече “)”.** Этот метод также неверен, потому что очередь работает по принципу «первый вошел — первый вышел», тогда как правильная вложенность требует использования стека, который работает по принципу «последний вошел — первый вышел».

Ответ: 2.

Задание 6

Вам дан отсортированный массив [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]. Сколько сравнений потребуется для поиска элемента 14 с помощью двоичного поиска?

1) 2

2) 3

3) 4

4) 5

Краткая теоретическая справка

Двоичный поиск — это эффективный алгоритм для поиска элемента в **отсортированном** массиве. Его основной принцип заключается в том, чтобы каждый раз уменьшать область поиска в два раза, сравнивая искомый элемент с центральным элементом массива.

Алгоритм работы двоичного поиска:

1. **Инициализация**:

   Пусть у нас есть массив с элементами, отсортированными в порядке возрастания, и мы знаем индексы начала и конца массива (или подмассива). Эти индексы обозначаются как left и right.

2. **Выбор центрального элемента**:
   На каждом шаге мы находим центральный элемент подмассива: mid=(left + right) // 2 (целочисленное деление)
   Сравниваем этот центральный элемент с искомым значением.
3. **Сравнение**:
   - Если центральный элемент равен искомому, мы завершили поиск и нашли элемент.
   - Если центральный элемент **больше** искомого, мы сужаем область поиска до левой половины массива, обновляя индекс right = mid - 1.
   - Если центральный элемент **меньше** искомого, область поиска сужается до правой половины, обновляя индекс left = mid + 1.
4. **Повторение**:
   Алгоритм повторяется, пока искомый элемент не будет найден или пока область поиска не станет пустой (если элемент отсутствует в массиве).

Двоичный поиск — это мощный метод для поиска элемента в отсортированном массиве. Он выполняет минимальное количество сравнений, что делает его предпочтительным для работы с большими массивами данных.

Решение задания

Для поиска элемента 14 в отсортированном массиве с помощью **двоичного поиска**, нам нужно выполнить последовательность сравнений, начиная с центрального элемента массива и затем делить массив пополам, пока не найдём нужное число.

Шаги алгоритма:

1. Массив: [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]. Начальный диапазон индексов: от 0 до 9.
   Выбираем центральный элемент:
   Центральный индекс = (0 + 9) // 2 = 4.
   Центральный элемент = 10.
   Сравниваем:
   14 > 10 (Ищем в правой половине массива).
   Остается диапазон: [12, 14, 16, 18, 20].

2. Теперь ищем в правой половине: индексы от 5 до 9.
   Центральный индекс = (5 + 9) // 2 = 7.
   Центральный элемент = 16.
   Сравниваем:
   14 < 16 (Ищем в левой половине оставшегося массива).
   Остается диапазон: [12, 14].
3. Теперь рассматриваем диапазон: индексы от 5 до 6.
   Центральный индекс = (5 + 6) // 2 = 5.
   Центральный элемент = 12.
   Сравниваем:
   14 > 12 (Ищем в правой половине оставшегося массива).
   Остается элемент: [14].
4. Последнее сравнение:
   Центральный индекс = 6, элемент = 14.
   Элемент найден.

Таким образом, требуется **4 сравнения**.

Ответ: 3

Задание 12

Текст задания демоварианта

Рассмотрите следующий псевдокод:

```
x = 10
y = 0
while x > 0:
    if x % 2 == 0:
        y = y + 1
    x = x - 1
```

Какое значение будет содержаться в переменной y после завершения работы алгоритма?

Краткая теоретическая справка

Операция деления с остатком (%)

Операция % возвращает остаток от деления одного числа на другое. Она особенно полезна для проверки четности чисел. Если число делится на 2 без остатка (x % 2 == 0), оно считается четным.

Алгоритм работы цикла while

Цикл while выполняется до тех пор, пока условие в его заголовке истинно. В данной задаче цикл продолжается, пока переменная x больше 0. На каждом шаге выполняется проверка на четность значения переменной x и её уменьшение на 1.

Решение задания

Алгоритм работы:

1. Инициализируем переменные:
   - x = 10
   - y = 0
2. Начинаем цикл while x > 0, который будет выполняться до тех пор, пока значение переменной x не станет меньше или равно 0.
3. На каждом шаге цикла:
   - Проверяем, является ли текущее значение x четным (условие x % 2 == 0).
   - Если условие выполняется (т.е. x делится на 2 без остатка), увеличиваем значение переменной y на 1 (y = y + 1).
   - Независимо от того, было ли значение четным, уменьшаем значение переменной x на 1 (x = x - 1).

Подробный разбор работы алгоритма по шагам:

1. Первый шаг:

- x = 10 (четное)
- Условие `if` выполняется, поэтому y = 0 + 1 = 1
- x = 10 - 1 = 9

2. Второй шаг:

- x = 9 (нечетное)
- Условие `if` не выполняется, y остается равным 1
- x = 9 - 1 = 8

3. Третий шаг:

- x = 8 (четное)
- Условие `if` выполняется, поэтому y = 1 + 1 = 2
- x = 8 - 1 = 7

4. Четвертый шаг:

- x = 7 (нечетное)
- Условие `if` не выполняется, y остается равным 2
- x = 7 - 1 = 6

5. Пятый шаг:

- x = 6 (четное)
- Условие `if` выполняется, поэтому y = 2 + 1 = 3
- x = 6 - 1 = 5

6. Шестой шаг:

- x = 5 (нечетное)
- Условие `if` не выполняется, y остается равным 3
- x = 5 - 1 = 4

7. Седьмой шаг:

- x = 4 (четное)
- Условие `if` выполняется, поэтому y = 3 + 1 = 4
- x = 4 - 1 = 3

8. Восьмой шаг:

- x = 3 (нечетное)
- Условие `if` не выполняется, y остается равным 4
- x = 3 - 1 = 2

9. Девятый шаг:

- x = 2 (четное)
- Условие `if` выполняется, поэтому y = 4 + 1 = 5
- x = 2 - 1 = 1

10. Десятый шаг:

- x = 1 (нечетное)
- Условие `if` не выполняется, y остается равным 5
- x = 1 - 1 = 0

Цикл завершается, так как x становится равным 0.

После завершения работы алгоритма значение переменной y будет 5.

Ответ: 5