Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ЦЕНТР ДОВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ

Методические рекомендации для подготовки к прохождению теоретического этапа Московского конкурса

межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис.

Потенциал»

в номинации «ИТ-класс» по единому направлению

МАТЕМАТИКА

Автор

Пугачев О.В.,
профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Москва 2023

Введение

Формирование жизненных и предпрофессиональных умений – первостепенная задача системы образования. Выпускник должен уметь применять знания в реальной жизни, ориентироваться в большом объеме информации и самостоятельно получать новые знания, разрабатывать реальные и необходимые проекты и презентовать инновационные идеи.

Проект «IT- класс в московской школе» ставит своей задачей предпрофессиональную подготовку будущего инженера. В рамках проекта обучающиеся образовательных учреждений общего среднего образования получают углубленные знания по учебным дисциплинам, на основе которых они смогут успешно обучаться в инженерном ВУЗе. Экскурсии на кафедры ВУЗов и на производственные предприятия дают возможность познакомиться с характером инженерной деятельности, производственная практика в рамках проекта позволяет включиться в деятельность предприятия или лаборатории, а выполнение проекта инженерно-технической направленности формирует умения, необходимые в дальнейшей работе. Все это вместе взятое осуществляет профессиональную навигацию обучающихся и ориентирует их на осознанный выбор будущей профессии.

По окончании обучения в рамках проекта «IT- класс в московской школе» предусмотрена итоговая диагностика. Московский конкурс межпредметных навыков и знаний – форма независимой итоговой оценки с участием представителей вузов, которая проводится по результатам освоения обучающимися предпрофессиональных профильных программ в IT-классах. В настоящих методических указаниях рассматриваются вопросы подготовки обучающихся к теоретическому этапу Конкурса в форме компьютерного тестирования.

Материалы теоретической части Конкурса межпредметных навыков и знаний предназначаются для определения уровня освоения выпускниками знаний, умений, ключевых компетенций образовательных программ профильных предметов и элективных курсов. При разработке контрольно-измерительных материалов было учтено, что инженерный труд предусматривает работу с информацией, представленной в самых разных формах: вербально-текстовой, знаково-символьной, в частности, формульной и табличной, графической, символьно-графической. При этом современные средства отображения информации часто выдают результат как интеграцию указанных форм.

Другой особенностью контрольно-измерительных материалов является их метапредметный характер, также вытекающий из требований к будущей профессии инженера. В контрольно-измерительных материалах в рамках одного задания объединяются вопросы, относящиеся, в основном, к трем предметным областям: математике, физике и информатике. При этом задача с физико-техническим содержанием может потребовать высокой математической культуры, а задача, относящаяся к проблемам обработки информации, опирается на хорошие естественнонаучные знания.

Структура экзаменационной работы теоретической части предпрофессионального экзамена

Индивидуальный вариант участника формируется автоматически из базы материалов и состоит из 10 заданий базового и повышенного уровня сложности. В работе имеются задания с кратким ответом и задания с выбором одного ответа из нескольких предложенных. Каждое задание оценивается в 4 или 8 баллов, в зависимости от уровня сложности. Максимально возможный балл за теоретический этап – 60 баллов. Для решения заданий можно использовать калькулятор и таблицу физических постоянных. Задание считается выполненным, если ответ участника совпал с эталоном. Участник может изменить свой ответ в процессе выполнения работы путём удаления и сохранения нового ответа к заданию. Для получения максимального балла за теоретический этап Конкурса необходимо дать верные ответы на все задания.

План демонстрационного варианта теоретической части экзаменационной работы для выпускников, обучавшихся в рамках проекта «IT- класс в московской школе»

№ задания	Уровень сложности	*Уникальные кодификаторы Конкурса*	Контролируемые требования к проверяемым умениям	Балл
2.	*базовый*	1.1 Числа и выражения 1.1.1 Решение задач с использованием свойств чисел и систем счисления, делимости, долей и частей, процентов, модулей чисел	Уметь применять знания в области систем счисления, долей и частей, процентов и модулей.	4
5.	*базовый*	**1.**4 Статистика и теория вероятностей 1.4.1 Табличное и графическое представление данных. Решение задач практического содержания, в том числе на выбор оптимального варианта множеств/теории графов	Уметь решать задачи на выбор оптимального варианта с применением знаний по теории графов и множнств	4
Сумма баллов:				**8**

Разберем задачи с математическим содержанием, в том числе и междисциплинарные.

1. Основы теории множеств/теории графов

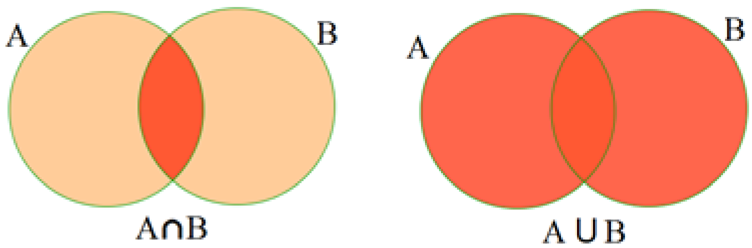
Задания Конкурса межпредметных навыков и знаний проверяют в том числе и умение решать задачи на индукционное представление информации. Для успешного решения таких задач необходимо ознакомиться с основами теории множеств, освоить операции над множествами.

Пересечением двух множеств A и B называют множество всех элементов, которые входят и во множество A, и во множество B. Обозначают: $A \cap B$.

Объединением двух множеств A и B называют множество всех элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств A или B. Обозначают: $A \cup B$.

Пример. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Тогда $A \cap B = \{2; 4\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$.

При решении задач на пересечение и объединение множеств часто множества изображают кругами. Эти круги называют ***кругами Эйлера*** по имени широко пользовавшегося ими Леонарда Эйлера. Тогда пересечение множеств A и B изобразится как общая часть этих кругов, а объединение – как множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества B.



Свойства операций над множествами:

1. Для любого множества Aвыполняются равенства:$A \cap A = A$, $A \cup A = A$.
2. Пересечение любых множеств A и B включается в каждое из них, а каждое из этих множеств включается в их объединение: $A \cap B \subset A$, $A \subset A \cup B$.
3. Для любых множеств A и B, где A есть подмножество B, т.е. $A \subset B$, их пересечение равно более узкому. А объединение – более широкому из них:

$$A \cap B = A, \quad A \cup B = B.$$

Задача 1.1. Найдите пересечение множеств $A = \{1; 4; 7; \dots; 898\}$, $B = \{1; 5; 9; \dots; 897\}$, $C = \{1; 6; 11; \dots; 896\}$.

Решение. Имеем $A = \{a_k = 3k - 2, k = 1, \dots ,300\}$, $B = \{b_k = 4k - 3, k = 1, \dots ,225\}$, $C = \{c_k = 5k - 4, k = 1, \dots ,180\}$. Пересечением этих множеств также будет арифметическая прогрессия с разностью $d = \text{НОК}\{3,4,5\} = 60$, следовательно, $A \cap B \cap C = \{1; 61; 121; \dots; 841\}$.

Задача 1.2. Найдите множества A и B, если $A \cap B = \{1; 2; 3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Решение. Элемент 4 может принадлежать $A \backslash B$ или $B \backslash A$, аналогично – элемент 5. Получаем 4 возможности: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ или $B = \{1; 2; 3\}$, $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$ или $B = \{1; 2; 3; 4\}$, $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

Задача 1.3. Известно, что $A \cap B = \{1; 2\}$, $A \cap C = \{2; 5\}$, $A \cup B = \{1; 2; 5; 6; 7; 9\}$, $B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$. Найдите множества A, B и C.

Решение.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	+	+	-	-	+	+	-	-	+
B	+	+	-	-	-	-	+	-	-
C	-	+	+	+	+	-	- или +	+	-

Ответ: $A = \{1; 2; 5; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{2; 3; 4; 5; 8\}$ или $C = \{2; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

Задача 1.4. (решение задания 12 демонстрационного варианта 2022 г.)

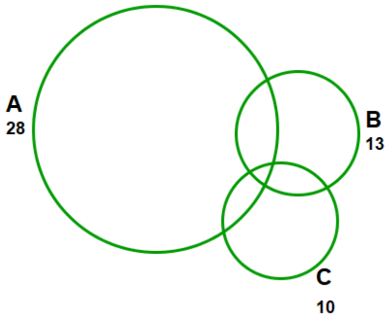
Сколькими способами можно разбить множество из 8 элементов $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ на три непустых множества так, чтобы элементы a и b оказались в одном множестве, а элемент c отдельно от них?

Решение. Обозначим три множества A, B, C так, чтобы a и b принадлежали A, c принадлежал C. Тогда каждый из остальных 5 элементов можно поместить в любое из 3 множеств (это можно сделать $3^5 = 243$ способами), только надо исключить те способы, при которых B окажется пустым, т. е. все 5 элементов попадут только в A и C (это можно сделать $2^5 = 32$ способами). Остаются $243 – 32 = 211$ способов.

Ответ: 211.

Формула включений и исключений

Задача 1.5. Из выпускников 2020 года одной школы владеют языком программирования Python 28 человек, Mat Lab – 13, C++ – 10, Python и Mat Lab – 8, Python и C++ – 6, Mat Lab и C++ – 5, всеми тремя языками – 2, а 21 человек не владеет ни одним из трех языков. Сколько всего выпускников?



Решение. Обозначим множество выпускников, которые владеют языком Python, Mat Lab или C++, соответственно через A, B и C. По условию

$$n(A) = 28, n(B) = 13, n(C) = 10, n(A \cap B) = 8,$$
$$n(A \cap C) = 6, n(B \cap C) = 5, n(A \cap B \cap C) = 2.$$

Сначала найдем число выпускников, которые владеют хотя бы одним из трех языков программирования, т.е. $n(A \cup B \cup C)$. Для этого применим круги Эйлера.

Подсчитаем сумму $n(A) + n(B) + n(C)$. Так как в нем каждое из чисел $n(A \cap B), n(A \cap C)$ и $n(B \cap C)$ вошло слагаемым два раза, то от этой суммы нужно отнять сумму $n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$.

Теперь выясним, сколько раз в полученное выражение

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

входит слагаемым число $n(A \cap B \cap C)$. Оно входит в эту сумму три раза со знаком плюс (в каждое из слагаемых $n(A), n(B), n(C)$) и три раза со знаком минус (в каждое из слагаемых $n(A \cap B), n(B \cap C), n(A \cap C)$). Следовательно, чтобы не потерять тех выпускников, которые входят во множество $A \cap B \cap C$, нужно еще прибавить число $n(A \cap B \cap C)$. Получаем:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Тогда будем иметь $n(A \cup B \cup C) = 28 + 13 + 10 - 8 - 6 - 5 + 2 = 34$. Значит общее число выпускников 2020 года равно 34 + 21 = 55. Ответ: 55.

Теорема (формула включений и исключений). Для любых конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_k$ справедлива следующая формула

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \cdots$$
$$-n(A_{k-1} \cap A_k) + +n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots +$$

Задача 1.6. Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый из них был связан ровно с 11 другими?

Решение. Нельзя, поскольку телефонных линий, связующих между собой эти телефоны, было бы 15·11/2 – не целое число.

2. Построение логических связей и цепочек рассуждений

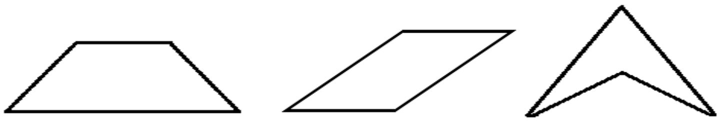
2.1. (решение задания 5 демонстрационного варианта 2022 г.)

Даны три утверждения о 4-угольнике на плоскости:

1) он выпуклый,
2) он имеет ось симметрии,
3) он имеет две пары равных сторон.

Какое из этих утверждений следует из конъюнкции двух других?

Решение: можно построить контрпримеры



(1)(2) не (3) (1)(3) не (2) (2)(3) не (1)

Ответ: никакое.

Задача 2.2.

Во множестве всех двузначных натуральных чисел даны три подмножества:

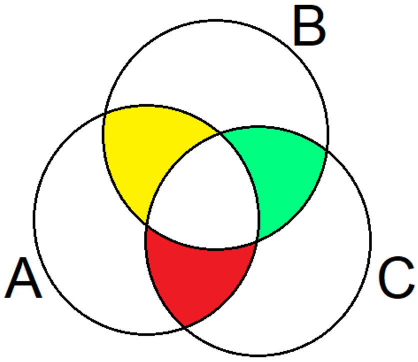
A = {x делится на 7},

B = {x не делится ни на 2, ни на 5},

C = {x < 40}.

Сколько чисел, принадлежащих ровно двум из этих трёх множеств?

Решение. Есть три взаимно исключающих случая:



Жёлтая область (A∩B)\C = {49, 63, 77, 91}.

Красная область $(A \cap C) \setminus B = \{14, 28, 35\}$.

Зелёная область $(B \cap C) \setminus A$ = {все числа с первой цифрой 1, 2, 3 и второй цифрой 1, 3, 7, 9, за исключением 21}. Таких чисел $3 \cdot 4 - 1 = 11$.

Ответ: 18 чисел.

3. Арифметика

Решение задач на числа (делимость, игры, процессы)

Задача 3.1. (решение задания 13 демонстрационного варианта 2023 г.) Все натуральные делители числа 675 выписаны в порядке возрастания. Сколькими способами из этой последовательности можно выбрать такие 6 чисел, что каждое число, кроме первого, делится на предыдущее?

Решение. Все натуральные делители числа $675 = 3^3 5^2$ имеют вид $3^m 5^n$, где $m = 0, 1, 2, 3$; $n = 0, 1, 2$. Чтобы следующее число $3^{m'} 5^{n'}$ делилось на предыдущее число $3^m 5^n$, необходимо и достаточно, чтобы $m' \geq m$ и $n' \geq n$, причем хотя бы одно из неравенств строгое. Таким образом, величина $m+n$ на каждом шаге увеличивается хотя бы на 1, но поскольку она может принимать значения от 0 до 5, и таких шагов надо сделать 5, то на каждом шаге величина $m + n$ должна увеличиться ровно на 1.

Так что нам остается лишь выбрать, на каких 3 шагах повышать m (брать следующее число в 3 раза больше предыдущего), а на каких 2 шагах повышать n (брать следующее число в 5 раз больше предыдущего). Число вариантов такого выбора равно числу сочетаний $C_5^2 = 10$.

Ответ: 10 способов.

Задача 3.2. (решение задания 13 демонстрационного варианта 2022 г.) Сколько натуральных чисел, кратных 40, являются делителями числа 888800000 ?

Решение. Разложим на простые множители:

$$888800000 = 8 \cdot 1111 \cdot 10^5 = 2^8 \cdot 5^5 \cdot 11 \cdot 101, \quad 40 = 2^3 \cdot 5.$$

Искомые числа должны иметь в своём разложении на простые множители от 3 до 8 двоек, от 1 до 5 пятёрок, 0 или одно 11, 0 или одно 101.

Получаем $6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 120$ возможностей.

Ответ: 120 чисел.

Преобразование модели из одной системы представления в другую

Задача 3.3. (решение задания 9 демонстрационного варианта 2023 г.) Сколькими нулями оканчивается запись числа 90! а) в десятичной системе, б) в восьмеричной системе?

Решение. Нужно выяснить, на 10 в какой степени и на 8 в какой степени делится число 90! Для этого сосчитаем, сколько раз встретятся 2 и 5 в разложении 90! на простые множители. Будем обозначать [x] целую часть числа x.

90! делится на 2 в степени

$$[90/2]+[90/4]+[90/8]+[90/16]+[90/32]+[90/64] = 45+22+11+5+2+1 = 86.$$

В то же время 90! делится на 5 в степени

$$[90/5]+[90/25] = 18+3 = 21.$$

Следовательно, 90! делится на 10 в степени min{86,21} = 21 и делится на 8 в степени [86/3] = 28.

Ответ: а) 21, б) 28.

4. Комбинаторика, основы теории вероятностей

Задание №6 предпрофессионального экзамена проверяет умение использовать явно заданную информацию для расчетов, применяя методы теории вероятностей. Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события.

Случайным событием называют событие, которое при некоторых условиях опыта или эксперимента может произойти или не произойти. Например, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием. Событие называют ***достоверным***, если в результате испытания оно обязательно происходит. ***Невозможным*** называют событие, которое в результате испытания произойти не может. Случайные события называются ***несовместными*** в данном испытании, если они не могут появиться вместе. Случайные события образуют ***полную группу***, если при каждом испытании может появиться ровно одно из них.

Элементарным исходом (или ***элементарным событием***) называют любой простейший (неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов называют ***пространством элементарных исходов***.

Множество исходов опыта образует пространство элементарных исходов, если выполнены следующие требования:

- в результате опыта один из исходов обязательно происходит;
- появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;
- в рамках данного опыта нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

Любой набор элементарных исходов, или иными словами, произвольное подмножество пространства элементарных исходов, образует случайное событие.

Пусть пространство элементарных исходов содержит конечное число N элементарных исходов, причем все они ***равновозможны***, т.е. в силу условий проведения опыта можно считать, ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. Пусть N_A – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению событию A. Исход называют ***благоприятствующим*** появлению события A, если появление этого события влечет за собой появление события A.

Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов, т.е.

$$\mathrm{P}(A) = N_A/N.$$

Данное определение вероятности принято называть ***классическим определением вероятности.***

Вероятность достоверного события равна единице. Вероятность невозможного события равна нулю. Вероятность случайного события A есть число, такое, что $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

Пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара. Из урны наугад извлекается один шар, необходимо найти вероятность того, что он будет: а) красным, б) чёрным, в) его номер будет четным числом, г) черным и его номер будет четным числом.

Количество всех элементарных исходов $N = 8$.

а) Пусть событие A – извлеченный шар оказался красным. Поскольку количество красных шаров в урне равно $N_A = 3$, то $\mathrm{P}(A) = 3/8 = 0{,}375$.

б) Пусть событие A – извлеченный шар оказался черным. Поскольку количество черных шаров в урне равно $N_A = 5$, то $P(A) = 5/8 = 0{,}625$.

в) Пусть событие A – извлеченный шар оказался с четным номером. Поскольку количество шаров с четными номерами в урне равно $N_A = 4$, то $P(A) = 4/8 = 0{,}5$.

г) Пусть событие A – извлеченный шар оказался черным с четным номером. Поскольку количество черных шаров с четными номерами в урне равно $N_A = 2$, то $P(A) = 2/8 = 0{,}25$.

Задача 4.1. (решение задания 6 демонстрационного варианта 2022 года)

В группе 10 туристов, из них 4 Андрея и 3 Василия, у остальных имена разные. Случайно выбрали четверых идти за дровами. С какой вероятностью среди них будет поровну Андреев и Василиев?

Решение. Выбрать 2 Андреев и 2 Василиев число способов $C_4^2 \cdot C_3^2 = 6 \cdot 3 = 18$.

Выбрать 1 Андрея, 1 Василия и 2 других число способов $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

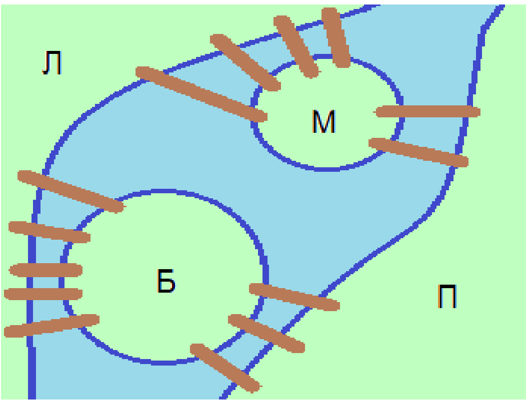
Выбрать 4 не Андреев не Василиев невозможно. Итого 54 способа.

Общее число способов выбрать четверых $C_{10}^4 = 210$. Вероятность = 54/210 = 9/35.

Ответ: 9/35.

Задача 4.2. (решение задания 6 демонстрационного варианта 2023 года)

На реке два острова: Большой (Б) и Малый (М); с Б на левый (Л) берег ведут 5 мостов, на правый (П) берег 3 моста; с М на Л ведут 4 моста, на П ведут 2 моста. Других мостов нет. За ночь каждый мост, независимо от других, будет разрушен с вероятностью 1/2. С какой вероятностью станет невозможно проехать с Л на П?



Решение. Всего имеется $N = 2^{5+3+4+2} = 2^{14} = 16384$ равновероятных исходов – состояний системы мостов.

Чтобы нельзя было проехать с Л на П через Б, должны либо рухнуть все мосты с Л на Б, а состояние мостов с Б на П безразлично (2^3 вариантов); либо рухнуть все мосты с Б на П, а состояние мостов с Л на Б безразлично (2^5 вариантов). Но мы дважды посчитали случай разрушения всех 8 мостов на Б, так что на самом деле получается $2^3+2^5-1 = 39$ вариантов.

Чтобы нельзя было проехать с Л на П через М, должны либо рухнуть все мосты с Л на М, а состояние мостов с М на П безразлично (2^2 вариантов); либо рухнуть все мосты с М на П, а состояние мостов с Л на М безразлично (2^4 вариантов). Но мы дважды посчитали случай разрушения всех 6 мостов на М, так что получаем $2^2+2^4-1=19$ вариантов.

В итоге число элементарных исходов, при которых проехать с Л на П нельзя никак, составит М = 39·19 = 741. Вероятность равна M/N.

Ответ: 741/16384.

5. Экстремальные задачи

Задание №10 предпрофессионального экзамена проверяет умение проводить экстремальные оценки. Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения величин обычно называют задачами на нахождение экстремумов или задачами на оптимизацию. Такие задачи общепризнано являются важными как для самой математики и ее приложений, так и для практической деятельности человека. В жизни постоянно приходится сталкиваться с необходимостью принять наилучшее (оптимальное) решение. Огромное число подобных проблем возникает в физике и других областях естествознания, в технике, в экономике.

Для успешного решения задания №10 необходимо с помощью алгебраических преобразований уметь находить наименьшее или наибольшее значение функции, зависящей от нескольких переменных (параметров).

Решение экстремальных задач без применения производной

При решении экстремальных задач без применения производной наиболее часто используется прием ***выделения полного квадрата***.

Пусть дан квадратный трехчлен $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c$, где $a \neq 0$. Проведем следующие преобразования:

$$\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c = a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c =$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

Задача 5.1.

В логистике затраты на доставку некоторого оборудования складываются из затрат на транспорт и хранение, которые определяются факторами a и b. Эти факторы могут принимать любые неотрицательные значения. Какие наименьшие затраты можно заложить на доставку оборудования по полученному заказу, если зависимость этих затрат задается формулой $2a^2 + 4b^2 - 2a + 5$? Чему при этом равно значение факторов?

Решение. Для решения задачи необходимо найти наименьшее значение выражения $2a^2 + 4b^2 - 2a + 5$ при неотрицательных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$2a^2 + 4b^2 - 2a + 5 = 2a^2 - 2a + 4b^2 + 5 = 2\left(a^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 4b^2 + 5 =$$

$$= 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 4b^2 + 5 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 4b^2 + 4{,}5 \geq 4{,}5,$$

причем равенство достигается при $a = 0{,}5$ и $b = 0$.

Ответ:

Наименьшие затраты	Значение фактора транспорта	Значение фактора хранения
4,5	0,5	0

Задача 5.2 (решение задания 7 демонстрационного варианта 2019 года).

Фирма выпускает два вида продукции объемами a и b. Эти объемы выпуска могут принимать любые натуральные значения. Какую наибольшую прибыль может получить фирма, если зависимость прибыли от объемов выпуска продукции задается формулой

$$7 - a^2 - b^2 + 4a + 6b?$$

Решение. Для решения задачи необходимо найти наибольшее значение выражения $7 - a^2 - b^2 + 4a + 6b$ при натуральных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$7 - (a^2 - 4a + 4 - 4) - (b^2 - 6b + 9 - 9) = 20 - (a-2)^2 - (b-3)^2 \leq 20,$$

причем равенство достигается при $a = 2$ и $b = 3$. Ответ: 20.

Решение экстремальных задач с применением производной

Точку x_0 называют ***точкой минимума*** функции f, если существует такой интервал $(a; b)$, содержащий x_0 $(x_0 \in (a; b))$, что для всех $x \in (a; b)$ выполнено $f(x) \geq f(x_0)$.

Точку x_0 называют ***точкой максимума*** функции f, если существует такой интервал $(a; b)$, содержащий x_0 $(x_0 \in (a; b))$, что для всех $x \in (a; b)$ выполнено $f(x) \le f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называют ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами функции***.

Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называют ***критическими точками*** этой функции.

Необходимый признак экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f', то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ в некотором интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ в некотором интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) < 0$ в некотором интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ в некотором интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Известно, что непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f принимает на этом отрезке ***наибольшее и наименьшее значения***, т.е. существуют точки отрезка $[a; b]$, в которых f принимает наибольшее и наименьшее на $[a; b]$ значения. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 5.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения $f(x) = 12x - 9x^2 + 2x^3$ на промежутке [0; 2].

Решение. В любой точке отрезка [0; 2] функция $f(x) = 12x - 9x^2 + 2x^3$ имеет производную $f'(x) = 12 - 18x + 6x^2$.

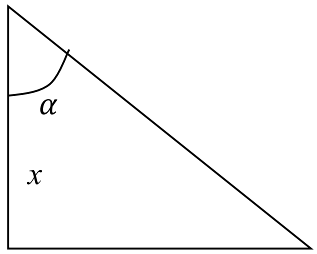
Найдем нули производной $x^2 - 3x + 2 = 0, x = 1, x = 2$. Обе точки принадлежат отрезку [0; 2]. Находим значения функции f в нулях производной и на концах отрезка: $f(0) = 0, f(1) = 5, f(2) = 4$. Выбираем наибольшее и наименьшее значения: $y_{\text{наиб}} = 5, y_{\text{наим}} = 0$. Ответ: $y_{\text{наиб}} = 5, y_{\text{наим}} = 0$.

Задача 5.4. На какой высоте нужно установить фонари, чтобы как можно лучше осветить улицу, если расстояние между соседними фонарями 30м?

Решение. Из курса физики известно, что освещенность плоскости обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна косинусу угла падения α:

$$f(x) = \frac{(k\cos\alpha)}{(x^2 + r^2)} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \qquad f(x) = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Исследуем функцию f на наибольшее значение.



Находим производную данной функции:

$$f'(x) = \frac{k(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot kx}{(x^2+r^2)^3} =$$

$$\frac{k(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}} - 3kx^2(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+r^2)^3} = \frac{k(x^2+r^2-3x^2)}{(x^2+r^2)^{2,5}} = \frac{k(r^2-2x^2)}{(x^2+r^2)^{2,5}}$$

Находим критические точки функции:

$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = 2x^2\ ; \qquad x = \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0.7r$$

Таким образом, фонари на улице, если расстояние между ними 30м (r = 15), целесообразно установить на высоте 10, 5 м. **Ответ:** 10,5 м.

Задача 5.5. Проектируется канал оросительной системы с прямоугольным сечением в 4,5 м^2. Каковы должны быть размеры сечения, чтобы для облицовки стенок и дна пошло наименьшее количество материала?

Решение. Пусть стенки канала имеют длину *x* м, а дно канала *y* м, *l* – длина канала, *S* – площадь стенок канала. Тогда

$$\mathrm{xy} = 4{,}5,\ \ y = \frac{9}{2x}, S(x) = 2\mathrm{lx} + \mathrm{ly} = l\left(2x + \frac{9}{2x}\right).$$

Найдем производную:

$$S'(x) = l\left(2 - \frac{9}{2x^2}\right) = l\frac{4x^2 - 9}{2x^2} = l\frac{(2x-3)(2x+3)}{2x^2}.$$

Решаем уравнение $S'(x) = 0$. Так как $S > 0$, и длина канала l - положительное число, то $x = 1{,}5$. Легко убедиться, что при данном *x* значение *S* минимально.

Ответ: *x*=1,5 м, *y*=3 м.

Задача 5.6. (решение задания 10 демоварианта 2022 года).

Какую высоту должен иметь прямой круговой цилиндр объёмом π, чтобы площадь всей его поверхности была минимальной?

Решение. Пусть радиус основания R, высота h, тогда

$$\text{объём} = \pi R^2 h = \pi, \text{ отсюда } h = 1/R^2,$$

$$\text{площадь всей поверхности} = 2\cdot\pi R^2+2\pi Rh = 2\pi(R^2+1/R).$$

Приравняем к 0 производную выражения в скобках:

$$2R-1/R^2 = 0, \quad \text{следовательно,} \quad R = 2^{-1/3}.$$

Ответ: $h = 4^{1/3}$.

Оглавление