МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

Подготовка к прохождению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (номинация «Инженерный класс», направление «Программирование»)

Методические рекомендации для учащихся предпрофессиональных классов и учителей профильных предметов (физика, математика, информатика)

Утверждено Факультетом довузовской подготовки

Москва

2022 год

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по решению заданий по предмету «Физика»
в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал», номинация «Инженерный класс», направление «Программирование»

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационного варианта по предмету «Физика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Теоретический этап Конкурса проводится в форме компьютерного тестирования. Во время выполнения работы разрешается использовать непрограммируемый калькулятор, таблицу физических величин.

В контрольно-измерительных материалах используются задания базового и повышенного уровня сложности, с выбором одного ответа из нескольких предложенных и с кратким ответом. Для каждого вида существует свой способ решения. Предложенные в демонстрационном варианте физические задачи имеют следующие виды усложнения:

– использование понятий и законов из разных разделов электродинамики, а также механики, что делает эти задачи комбинированными;

– применение элементов электротехники, что привносит в эти задачи межпредметную и прикладную направленность;

– включение разветвлённых электрических цепей со смешанным соединением проводников;

– использование смешанного соединения конденсаторов, которые недостаточно хорошо изучаются на школьном базовом уровне;

– отсутствие в содержании школьного базового уровня темы по расчёту электрических цепей универсальными методами Кирхгофа;

– преобразование единиц физических величин в единицы международной системы СИ и в кратные величины с учётом приставок и множителей;

– применение многоступенчатых алгебраических преобразований, требующих решения систем линейных и квадратных уравнений, с последующим вычислением физических величин.

С учётом всего указанного выше, рекомендуем решение задач демонстрационного варианта организовать следующим способом:

1. Чтение условия (не менее двух раз). Первое – ознакомительное, второе и последующие (при необходимости) – для выяснения конкретных деталей описанного события, составления или изучения рисунка (схемы) и краткой записи условия с переводом значений всех величин в систему СИ.

2. Проникновение в суть рассматриваемого в условии физического явления: выяснение физической теории, описывающей явление, конкретных законов и принципов, основных формул, охватывающих известные и неизвестные величины, приведенные в условии, и физические константы.

3. Установление физической связи между приведенными в условии известными и неизвестными величинами посредством системы уравнений, учитывая общее требование: количество уравнений в системе должно быть не меньше общего числа неизвестных физических величин в ней.

4. Решение системы уравнений и получение конечной формулы, выражающей искомую неизвестную величину через известные величины, указанные в условии и физические константы.

5. Выполнение численных расчётов, приведение полученного результата к требуемому по условию задачи формату (с применением стандартных множителей и приставок) и проверка полученного значения.

При краткой записи условия задачи необходимо сразу же выяснить размерность физических величин, перевести их в систему СИ. Иногда не требуется краткой записи условия задачи. Но это создаст трудности в построении математической модели физической ситуации задачи. Поэтому мы рекомендуем записывать «Дано» подробно и добиваться анализа текста задачи, корректного перевода текстовой формы условия физической задачи в математическую форму, правильного указания размерностей физических величин. Если задача решается в общем виде, то последний пункт рекомендаций по записи «Дано» можно пропустить.

Далее идёт самый сложный этап – построение физической модели ситуации задачи. В физической модели отражается основная идея задачи. В большинстве задач из разных разделов физики допускается возможность схематического или графического изображения физической ситуации, описанной в задаче. Даже если в условии этого не требуется, рисунок часто оказывается полезным. В предлагаемых задачах эта модель имеет вид чертежа или схемы электрической цепи. Если схема электрической цепи прилагается в готовом виде, то все усилия должны быть направлены на её анализ с целью построения математической модели (выбора адекватных уравнений), либо на преобразование для построения эквивалентной электрической цепи.

В результате анализа физической модели необходимо записать базовые формулы физических понятий и законы, которые планируется использовать. Нужно описать каждую вновь вводимую переменную (известную или неизвестную) и указать, какой буквой она обозначается. Участнику должен быть понятен смысл всех физических величин. Особенно это касается тех, которые обозначаются одинаковыми греческими или латинскими буквами (время и температура, электрический заряд и количество теплоты и т.п.). Необходимо их чёткое разграничение для верного подсчёта известных и неизвестных физических величин в задаче.

При описании решения учащиеся должны указать названия всех законов и границы, в которых они применяются. Важно правильно указать связи между законами, иллюстрировать каждую связь математическими уравнениями. После построения замкнутой системы алгебраических уравнений в явном или неявном виде (знак системы уравнений учащиеся могут не ставить), математическая модель решения задачи считается построенной. Нужно чёткое осознание учащимися, что число уравнений, должно быть равно числу неизвестных физических величин.

В дальнейшем решение задачи предполагает работу с алгебраическими уравнениями. На первое место в этом случае ставится знание математических формул, умения их преобразовывать, т. е. собственно математические умения.

Важно объяснить каждую математическую выкладку и логический переход так, чтобы была понятна логика решения: из какой формулы выражается конкретная физическая величина, куда она подставляется, какие происходят сокращения и преобразования формулы.

На следующем этапе решения задачи получают численное значение физических величин. Нужно проследить, чтобы вновь вводимые при построении модели постоянные были выражены в системе СИ и после проведения расчётов учащиеся получили результат в стандартном виде.

После получения численного результата, его значение проверяется на соответствие физической реальности – результат должен быть разумным, согласовываться с условием задачи, искомая формула иметь соответствующую размерность и находиться в объективных границах этой величины. Необходимо сделать проверку разными способами: по размерности искомой физической величины, по решению задачи другим способом и т. п.

Если задача предполагает несколько вариантов решения, то наиболее ценным будет тот, который предполагает самое рациональное решение –

наиболее короткое, с одной стороны, и наиболее обоснованное – с другой. Только после этого ученик переходит к записи ответа и завершению задачи.

Рассмотрим основные сложности, с которыми учащиеся могут встретиться в задачах демонстрационного варианта, а также методические пути их преодоления.

В задании №5 рассматривается система, состоящая из трёх взаимодействующих зарядов. В её тексте используется понятие «результирующая сила». К этому понятию в формулировках физических задач прибегают, когда нужно выяснить наличие знаний принципа суперпозиции и умений его применять.

При подготовке школьников к решению этой и подобных ей задач нужно определить понятие «результирующая сила» через результат одновременного взаимодействия заряда Q с зарядами Q_1 и Q_2. Необходимо показать её связь с равнодействующей (в силу независимого взаимодействия друг от друга каждой пары зарядов) и подробно разобрать, как по её направлению можно определить знак искомого заряда. Это является наибольшей сложностью в задании №5.

Для её преодоления нужно сформировать у школьников понимание, что в случае одинакового знака у зарядов Q_1 и Q_2 силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ будут направлены во взаимно противоположные стороны, а модуль результирующей силы будет являться разностью их модулей. Это позволит установить связь знака искомого заряда Q путём сравнения отношений действующих на него зарядов Q_1 и Q_2 к квадратам расстояний от заряда Q до зарядов Q_1 и Q_2:

– если $\frac{Q_1}{\ell_1^2} > \frac{Q_2}{\ell_2^2}$, то $F_1 > F_2$, тогда, учитывая направление равнодействующей, заряд Q_1 сильнее отталкивает искомый заряд Q, чем заряд Q_2 отталкивает этот же искомый заряд Q;

– если $\frac{Q_1}{\ell_1^2} < \frac{Q_2}{\ell_2^2}$, то $F_1 < F_2$, тогда, учитывая направление равнодействующей, заряд Q_1 слабее притягивает искомый заряд Q, чем заряд Q_2 притягивает этот же искомый заряд Q.

В задании №7 демонстрационного варианта основной идеей является выяснение закономерностей работы электрической цепи, включающей смешанное соединение конденсаторов. При подготовке школьников к решению этой и подобных ей задач нужно определить основные понятия, законы и формулы электродинамики:

– разность потенциалов, электрический заряд, электрический ток, сила тока;

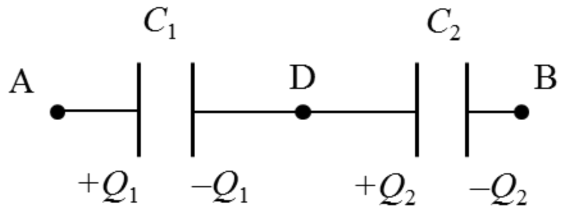
– электрическая ёмкость конденсатора, закон сохранения электрического заряда, закономерности последовательного и параллельного соединения конденсаторов,

– энергия электрического поля в конденсаторе.

Основную сложность при решении таких задач может представлять выражение электрической ёмкости участка цепи, соотношения между разностями потенциалов и зарядами через частные значения при последовательном и параллельном соединении конденсаторов, выражение энергии электрического поля в конденсаторе через известные параметры.

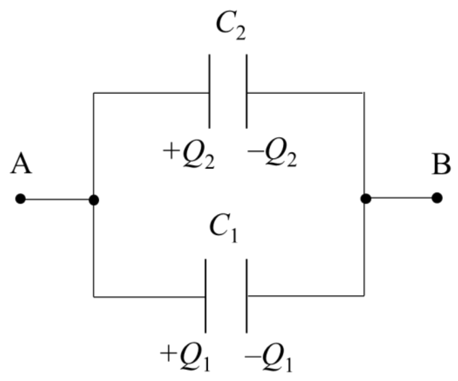
Для подготовки школьников к решению таких задач полезно рассмотреть с ними вывод формул:

1) при последовательном соединении:



$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}; \quad Q_1 = Q_2 = Q_{12}; \quad U_{AB} = U_1 + U_2;$$

2) при параллельном соединении:



$$C_{12} = C_1 + C_2; \quad Q_{12} = Q_1 + Q_2; \quad U_{\text{AB}} = U_1 = U_2 .$$

Также нужно рассмотреть формулы энергии электрического поля конденсатора в трёх вариантах, применяя формулу связи разности потенциалов между обкладками конденсатора, электрической ёмкости и заряда конденсатора (вывод величины энергии через работу сил электрического поля рассматривать не обязательно):

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q \cdot U}{2}$$

Это будет способствовать лучшему пониманию физики процессов, происходящих в цепях с конденсаторами, и позволит существенно сократить время на установление этих связей при выполнении задания.

Ученик может улучшить эффективность решения, если будет примерно представлять, насколько разные способы решения задачи отличаются по трудоёмкости и по времени. Поэтому желательно в процессе подготовки с учениками рассмотреть все варианты, представленные в видеоразборе.

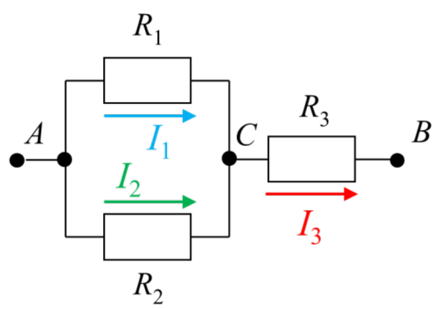
В задании №9 демонстрационного варианта представлено смешанное соединение проводников, обладающих одинаковыми сопротивлениями. Однако в аналогичных конкурсных задачах сопротивления могут иметь разные номиналы, и их число в схеме может быть больше. Основной сложностью в решении подобных задач является необходимость применения правил Кирхгофа, которые в прямом виде не изучаются на базовом уровне.

Для преодоления этой сложности необязательно ученикам в прямом виде изучать эти правила. Достаточно довести до уровня уверенного применения понимание следующих фактов.

1) В любом узле электрической схемы сумма входящих токов равна сумме выходящих токов (или, другими словами, алгебраическая сумма токов в узле равна нулю).

2) Электродвижущая сила (ЭДС) источника равна сумме падений напряжений на всех участках замкнутой цепи, включая падение напряжения на самом источнике (закон Ома для полной цепи).

Применение этих правил, а также формул, полученных для последовательного и параллельного соединения проводников, позволяет составить необходимое количество уравнений и установить аналитическую связь искомой величины с известными величинами в любой задаче.



$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,\ \text{или}\ I_3 = I_1 + I_2$$

$$U_1 = U_2 = U_{\text{AC}},\ \text{т.е.}\ I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_{\text{AC}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};\ R_{\text{AB}} = R_{12} + R_3$$

$$U_{\text{AB}} = U_{\text{AC}} + U_{\text{CB}},\ \text{т.е.}\ U_{\text{AB}} = I_3 \cdot R_{12} + I_3 \cdot R_3$$

В процессе подготовки учащихся к решению аналогичных задач необходимо повторить формулы для последовательного и параллельного соединения проводников, закон Ома для участка цепи, закон Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot \Delta t,$$

а также выражение для величины заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника, в цепи постоянного тока:

$$\Delta q = I \cdot \Delta t \, .$$

Московский конкурс межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»

в номинации «Инженерный класс» по направлению «Программирование»

Теоретический этап
Методические рекомендации

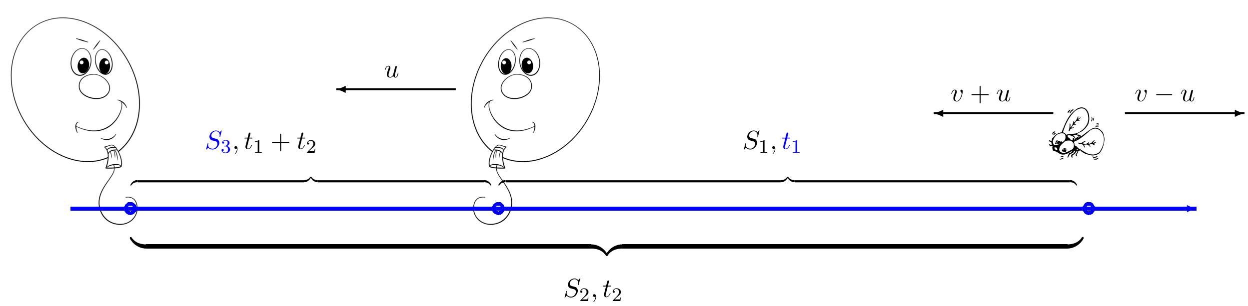
Задания по математике

Задание 4

С воздушного шарика, уносимого ветром, взлетает муха и летит против ветра. Через 6 минут ей надоедает бороться с воздушным потоком, и она с той же собственной скоростью возвращается на шарик. Найдите скорость ветра (в км/ч), если за время отсутствия мухи шарик успел пролететь 2 км.

Решение

Изобразим описанную в условии ситуацию. На рисунке ниже показано начальное (правее) и конечное (левее) положение шарика и положение мухи в момент разворота.



Скорость шарика u совпадает со скоростью ветра и направлена влево. Обозначим собственную скорость мухи через v. Тогда её скорость при движении вправо от шарика (против ветра) составит $v-u$, а при движении влево к шарику (по ветру) будет равна $v+u$.

Пусть от взлета до разворота муха преодолела расстояние S_1 за время t_1, а от разворота до посадки на шарик преодолела расстояние S_2 за время t_2. За время отсутствия мухи (равное t_1+t_2) шарик пролетел расстояние S_3.

Из всех введённых величин в условии задачи даны только S_3 и t_1.

Запишем соотношения между этими величинами, используя известную связь между скоростью, временем и расстоянием.

$$S_3 = u(t_1 + t_2) = ut_1 + ut_2,$$
$$S_1 = (v - u)t_1 = vt_1 - ut_1,$$
$$S_2 = (v + u)t_2 = vt_2 + ut_2.$$

Поскольку $S_1 + S_3 = S_2$, то

$$ut_2 + vt_1 = vt_2 + ut_2,$$

откуда получаем, что

$$t_1 = t_2.$$

Теперь из первого соотношения выводим

$$S_3 = 2ut_1.$$

Остаётся выразить искомую величину

$$u = \frac{S_3}{2t_1}$$

и подставить заданные числовые значения

$$u = \frac{2\text{ км}}{2 \cdot 0,1\text{ ч}} = 10\text{ км/ч}.$$

Ответ: $u = 10$ км/ч

Методические комментарии

1. Задачу можно отнести к стандартным задачам на движение. Возникающая при её решении система уравнений нелинейна и не может быть решена применением чисто механического алгоритма.

2. Интересно отметить, что уравнений движения (их три) меньше, чем неизвестных (которых четыре). Впрочем, дополнительное соотношение легко находится.

3. Также можно отметить, что для ответа на вопрос задачи не требуется искать все неизвестные величины. При выборе хорошей стратегии можно найти только часть из них (включая необходимую).

Задание 8

Правильный шестиугольник разбивается на треугольники максимальным числом диагоналей, не пересекающихся внутри фигуры. Найдите отношение площади всей фигуры к площади наименьшего из образовавшихся треугольников.

Решение

Можно начать рассуждения с перебора возможных способов проведения диагоналей. В результате получим три комбинации, изображенные ниже.

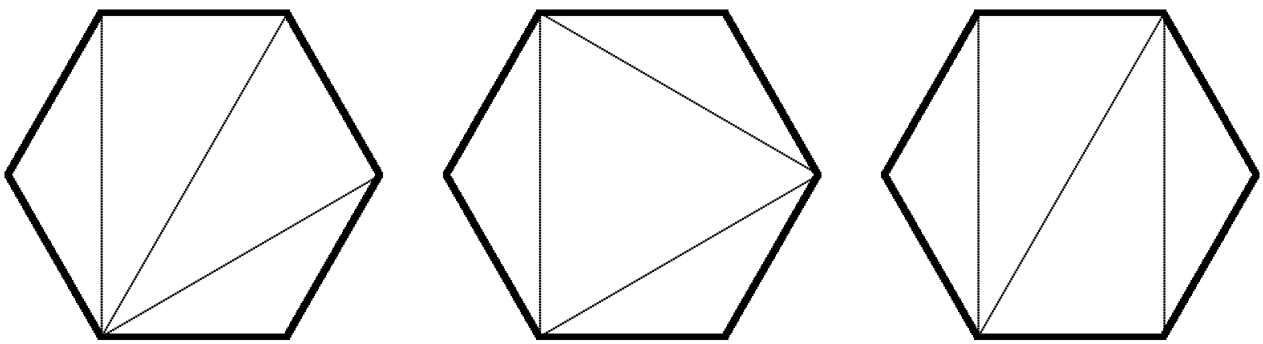


Рис. 1. Варианты проведения диагоналей

Видно, что во всех случаях наименьшей высекаемой диагоналями частью является треугольник, две стороны которого совпадают со смежными сторонами шестиугольника, а третья является диагональю. На рисунке ниже этот треугольник залит серым.

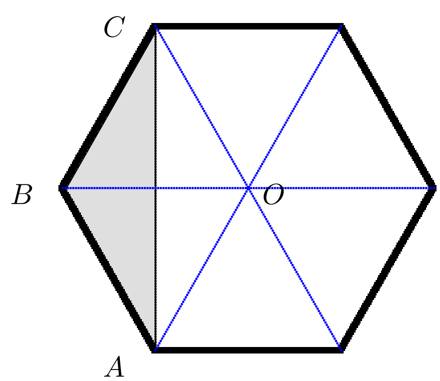


Рис. 2. Составные части

Также проведём три диагонали шестиугольника, пересекающиеся в его центре (на рис. 2 изображены синим). Эти диагонали разбивают правильный шестиугольник на шесть равных (также правильных) треугольников. Этот факт будем считать не требующим доказательства. Таким образом, площадь исходной фигуры (обозначим её S_6) может быть найдена как ушестерённая площадь «синего» треугольника (обозначим её $S_{\triangle}$).

$$S_6 = 6S_{\triangle}.$$

Теперь рассмотрим ромб $ABCO$. Он составлен из двух «синих» треугольников, следовательно, его площадь

$$S_{ABCO} = 2S_{\triangle}.$$

Искомый треугольник («серый») составляет ровно половину ромба $ABCO$, поэтому для его площади (обозначим её S_m) имеем

$$S_m = \frac{1}{2}S_{ABCO} = S_{\triangle}.$$

Остаётся вычислить искомое отношение.

$$\frac{S_6}{S_m} = \frac{6S_{\triangle}}{S_{\triangle}} = 6.$$

Ответ: $S_6/S_m = 6$

Дополнения

1. Вопрос отношения площадей можно решить более алгебраическим способом. Если обозначить сторону шестиугольника через a, то его площадь будет равна

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2}.$$

Площадь «серого» треугольника выразим через две стороны и угол между ними

$$S_m = \frac{1}{2}a^2\sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4}.$$

Отношение выписанных величин даёт приведенный выше ответ.

Если использованные выше формулы (или одна из них) неизвестны участнику, то они легко могут быть выведены из стандартной формулы площади треугольника. Соответствующий вывод здесь не приводится.

2. Для полноты решения следует рассмотреть вопрос о том, на какое количество треугольников можно разбить правильный шестиугольник непересекающимися внутри фигуры диагоналями.

Обозначим это количество через $k_{\triangle}$.

Решение данного вопроса можно получить из анализа меры углов фигур. Поскольку диагонали не пересекаются внутри многоугольника, то все вершины треугольников совпадают с вершинами исходной фигуры. Поэтому сумма всех углов всех треугольников будет совпадать с суммой всех углов исходного шестиугольника (её значение считаем известным или легко находимым).

Получаем соотношение

$$k_{\triangle} \cdot \pi \quad = \quad 4 \cdot \pi,$$

откуда

$$k_{\triangle} = 4.$$

Именно такое количество частей получено во всех вариантах разбиения, приведенных на рис. 1.

3. Тот же вопрос, что в п. 2, можно сформулировать в других терминах. Определим, какое максимальное количество непересекающихся внутри фигуры диагоналей можно провести.

Заметим, что в тексте задачи эти формулировки переплетены. С одной стороны, говорится о максимальном количестве диагоналей, но с другой, фиксируется, что в результате разбиения получаются треугольники. Эти два факта требуют логических рассуждений (впрочем, весьма несложных) для увязывания друг с другом.

Решение нового вопроса можно получить из анализа сторон фигур. Обозначим указанное количество диагоналей через K_D.

Первая диагональ разбивает правильный многоугольник на две части. Каждая следующая (разбивая какую-то из частей на две) добавляет к уже имеющемуся количеству частей одну новую. Поэтому K_D непересекающихся внутри правильного шестиугольника диагоналей разбивают его на $(K_D + 1)$ частей.

Теперь вычислим двумя способами общее количество всех сторон всех получившихся фигур.

С одной стороны, каждая часть имеет не менее трёх сторон. Поэтому общее количество сторон не менее, чем $3(K_D + 1)$.

С другой стороны, каждая из K_D диагоналей входит в две фигуры, а следовательно, должна быть учтена дважды. Полученное количество должно быть дополнено количеством сторон исходной фигуры, которые также являются сторонами некоторых полученных частей. Получаем всего $2K_D + 6$ сторон. Таким образом,

$$2K_D + 6 \quad \geq \quad 3(K_D + 1),$$

откуда
$$K_D \leq 3.$$

Достижение найденной границы ($K_D = 3$) подтверждается примерами на рис. 1.

Методические комментарии

1. Задача весьма легко решается «на глазок» – достаточно представить в уме чертёж, изображённый на рис. 2. Именно так следует поступать во время конкурсного испытания, оставляя все вопросы о максимальном количестве и т.п. на интуитивно понятном уровне.

2. Следует обратить внимание на вопросы математической строгости решения. Любое построение (даже путём перебора вариантов) всегда оставляет открытым ряд вопросов. Например, можно ли провести больше диагоналей, все ли части будут треугольными и т.д. Ответы на некоторые из них приведены в дополнениях.

3. Для закрепления задачи можно разобрать аналогичные вопросы для правильных восьми- и двенадцатиугольников. Для понимания важности симметрии, существенно облегчающей анализ задачи, можно разобрать пример с пятиугольником.

Задание 10

Двухголовый Змей Горыныч имеет очень ограниченный объём оперативной памяти. Одна его голова может запомнить 4 математические формулы, а другая – 6 формул. Каким количеством разных способов Горыныч может разместить по своим головам 10 различных формул? Порядок расположения формул в каждой голове не важен.

Решение

Предположим, что некоторые четыре формулы (произвольные) удалось поместить в одну голову Горыныча (см. иллюстрацию справа). Тогда все оставшиеся (их 6 штук) однозначно отправляются в его другую голову, поскольку именно такое количество там можно разместить. Таким образом, количество искомых способов будет совпадать с количеством способов выбора четырёх произвольных элементов из десяти. При этом порядок расположения элементов не важен, важен только состав четвёрки. Такое количество N равно количеству сочетаний из десяти по четыре

$$N = C_{10}^{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210.$$

Заметим, что если начинать рассуждения с другой головы, в которую нужно вложить шесть формул, то будет получена эквивалентная постановка о выборе шести элементов из десяти. Но, как известно, $C_{10}^{4} = C_{10}^{6}$, поэтому будет получен тот же числовой ответ.

Приведем **альтернативный вариант решения**, не требующий знакомства с формулами комбинаторики.

Подсчитаем «в лоб» количество способов выбрать четыре элемента из десяти. Первый элемент можно выбрать 10-ю способами. Из оставшихся 9-ти элементов можно выбрать второй 9-ю способами. Далее, аналогично, третий можно выбрать 8-ю способами и, наконец, четвертый – 7-ю. Итого получаем $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ вариантов.

Однако среди них будут попадаться выборки с одинаковыми элементами, но стоящими в разном порядке. Поэтому полученное количество нужно разделить на количество способов, которым можно расставить фиксированную четвёрку элементов в разном порядке. Оно подсчитывается аналогично: на первое место можно поставить любой элемент из четырех, на второе – любой из трёх и т.д. В итоге, получаем величину $4 \cdot 3 \cdot 2$. Искомое количество N при таком подсчёте равно

$$N = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210.$$

Ответ: 210 способов.

Методические комментарии

Для участников, знакомых с комбинаторикой, задача не должна вызывать особых проблем: главное – осознать, что вторая голова и расположение формул в ней не влияет на результат.

Для участников, затрудняющихся или вовсе не знакомых с комбинаторикой, имеет смысл в процессе обсуждения второго варианта решения ввести в рассмотрение три основных понятия: перестановки, размещения и сочетания, а также взаимосвязи между ними. Дополнительно имеет смысл обратить внимание на то, что все формулы комбинаторики легко получаются из простых логических рассуждений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по решению заданий по предмету «Информатика»

в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал», номинация «Инженерный класс», направление «Программирование»

Задания 1-3. «Вычисление суммы сходящегося ряда»

Условие задачи

На вход программе даётся вещественное число x и вещественное число eps. Программа считает сумму представленного ниже ряда в точке x, принадлежащей отрезку [–1, 1], с точностью eps.

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}x^{2i+1}\left(\frac{1}{i!}+\frac{1}{(2i+1)!}\right)=x^3\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}\right)-x^5\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{5!}\right)+\ldots\pm x^{2i+1}\left(\frac{1}{i!}+\frac{1}{(2i+1)!}\right)\mp\ldots$$

Представленный ряд является разложением функции $2x-xe^{-x^2}-\sin x$.

Известно, что сумма ряда определена с точностью eps, если разница между текущим и предыдущим членами ряда не больше значения точности.

Предполагается, что пользователь вводит корректные исходные данные (т.е. дополнительная проверка корректности входных данных в тексте программы не требуется).

В задаче предлагается возможный код программы, представленный на рис. 1, и требуется сделать следующее:

- выбрать последовательность символов на место пропусков, обозначенных [1], [2] и [3];
- выбрать из предложенных фрагментов кода тот, который позволит программе вычислить верный результат;
- определить номер некорректно написанной строки программы.

```
алг
нач
  вещ x, eps;

  ввод x;
  ввод eps;

  вещ sum, current, next, s1, s2;
  цел i;

  current :=[1];
  s1 := pow(x, 3);
  s2 := pow(x, 3) / 2 * 3;
  next := s1 + s2;
  sum := next;
  i := 1;

  нц пока (abs(next[2]current)[3]eps)

            Вырезанный фрагмент


    sum := sum + next;
  кц

  вывод "S = ", sum, нс;
  вещ preciseValue;
  preciseValue := 2 * x - x * exp(-x * x) - sin(x);
  вывод "Значение в точке = ", preciseValue, нс;

кон
```

Рис. 1. Код программы, написанный на псевдокоде

Решение

Для решения задачи требуется сделать следующее:

1. Вычислить коэффициент рекуррентного соотношения для получения очередного члена ряда.

2. Проверить правильность полученного соотношения на примере вычисления первых двух-трёх слагаемых.

3. Описать вычисление очередного члена ряда и суммы на языке программирования и убедиться, что программа работает корректно.

4. Проверить полученное значение суммы ряда, подставив исходное значение x в контрольную формулу.

Рекуррентное соотношение – это уравнение, которое рекурсивно определяет последовательность, в которой следующий член является функцией одного или нескольких предыдущих членов. В данной задаче рекуррентное соотношение позволяет вычислить очередное слагаемое, умножив предыдущее на некоторое выражение. Таким образом, мы можем сократить вычисления, необходимые для получения очередного слагаемого. Например, если общая формула слагаемого x^i, то вычисляя слагаемое без использования рекуррентного соотношения, мы должны будем сделать $(i-1)$ умножение. Но $(i-1)$-ое слагаемое есть x^{i-1}, и чтобы получить x^i, зная x^{i-1}, достаточно выполнить только одно умножение.

Другие примеры рекуррентных соотношений:

1. Последовательность Фибоначчи: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при n>2.
2. Факториал: $0! = 1$, $n! = n*(n-1)!$ при n>=1.

В задаче на вычисление суммы ряда первое слагаемое берётся из формулы для суммы ряда.

В данном случае ряд вычисляется по формуле, которая имеет следующий общий вид: $S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} x^{2i+1} \left(\frac{1}{i!} + \frac{1}{(2i+1)!} \right)$. В этой формуле мы имеем сумму двух слагаемых, умноженную на x в некоторой степени.

Для вычисления рекуррентного соотношения необходимо поделить i-ое слагаемое на $(i-1)$-ое. Но для этого придётся приводить дроби к общему знаменателю, и в числителе окажутся факториалы. Вычисление факториала напрямую может оказаться проблематичным в зависимости от языка программирования, разрядной сетки и разных других условий. Т. к. в данной задаче факториал стоит в знаменателе, значит можно вычислять величину, обратную факториалу (эта величина будет стремиться к 0).

Вспомним одно из свойств сходящихся рядов. Если два ряда сходятся, то их сумма тоже сходится. Проанализируем наш ряд.

Так как $|x|<1$, то $|x^i| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. Для слагаемых суммы имеем $\frac{1}{i!} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ и $\frac{1}{(2i+1)!} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. То есть наш ряд можно представить в виде суммы двух сходящихся рядов. Зная это, можем вычислить рекуррентные соотношения для каждого слагаемого в отдельности

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}x^{2i+1}\left(\frac{1}{i!}+\frac{1}{(2i+1)!}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}x^{2i+1}\left(\frac{1}{i!}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}x^{2i+1}\left(\frac{1}{(2i+1)!}\right)=Sum1+Sum2.$$

Вычислим рекуррентные соотношения для каждого слагаемого.

$$S1_i=(-1)^{i+1}x^{2i+1}\cdot\frac{1}{i!}=(-1)^{i+1}x^{2i+1}\cdot\frac{1}{i\cdot(i-1)!}$$

$$S1_{i-1}=(-1)^{i-1+1}x^{2(i-1)+1}\cdot\frac{1}{(i-1)!}=(-1)^{i}x^{2i-1}\cdot\frac{1}{(i-1)!}$$

$$\frac{S1_i}{S1_{i-1}}=\frac{(-1)^{i+1}x^{2i+1}\cdot\frac{1}{i\cdot(i-1)!}}{(-1)^{i}x^{2i-1}\cdot\frac{1}{(i-1)!}}=(-1)^{i+1-i}x^{2i+1-(2i-1)}\cdot\frac{(i-1)!}{i\cdot(i-1)!}=\frac{(-1)\cdot x^2}{i}$$

Таким образом, $S1_i=\frac{(-1)\cdot x^2}{i}\cdot S1_{i-1}$.

Аналогично для второго слагаемого.

$$S2_i=(-1)^{i+1}x^{2i+1}\cdot\frac{1}{(2i+1)!}=(-1)^{i+1}x^{2i+1}\cdot\frac{1}{(2i+1)\cdot(2i)\cdot(2i-1)!}$$

$$S2_{i-1}=(-1)^{i-1+1}x^{2(i-1)+1}\cdot\frac{1}{(2(i-1)+1)!}=(-1)^{i}x^{2i-1}\cdot\frac{1}{(2i-1)!}$$

$$\frac{S2_i}{S2_{i-1}}=\frac{(-1)^{i+1}x^{2i+1}\cdot\frac{1}{(2i+1)\cdot(2i)\cdot(2i-1)!}}{(-1)^{i}x^{2i-1}\cdot\frac{1}{(2i-1)!}}=(-1)^{i+1-i}x^{2i+1-(2i-1)}\cdot\frac{(2i-1)!}{(2i+1)\cdot(2i)\cdot(2i-1)!}=\frac{(-1)\cdot x^2}{2i\cdot(2i+1)}$$

Таким образом, $S2_i=\frac{(-1)\cdot x^2}{2i\cdot(2i+1)}\cdot S2_{i-1}$.

Проверим правильность рекуррентных соотношений на примере первых членов ряда.

	$S1_i$	$S2_i$	Полученное значение	Значение из формулы
S_1	Задаётся: x^3	Задаётся: $x^3/6$	$x^3\left(1+\frac{1}{6}\right)$	$x^3\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}\right)$
S_2	$S1_2=-\frac{x^5}{2}$	$S2_2=-\frac{x^5}{120}$	$-x^5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{120}\right)$	$-x^5\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{5!}\right)$
S_3	$S1_3=\frac{x^7}{6}$	$S2_3=\frac{x^7}{120*6*7}$	$x^7\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7!}\right)$	$x^7\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{7!}\right)$

Поскольку выражение, полученное с помощью рекуррентных соотношений, совпадает с выражением, полученным непосредственно по формуле члена ряда, можно сделать вывод, что рекуррентные соотношения вычислены правильно.

Для решения задачи реализуем алгоритм, блок-схема которого представлена на рис. 2.

В задании требовалось вставить пропущенные символы [1-3], вставить вырезанный фрагмент и определить некорректно написанную строку. Если мы сравним блок-схему (рис. 2) с предложенной программой (рис. 1), то увидим, что надо вставить 0, знак минус (-) и знак больше (>). Вырезанный фрагмент кода должен соответствовать телу цикла. Некорректной в данном случае является строка 13, т. к. там вместо деления стоит умножение.

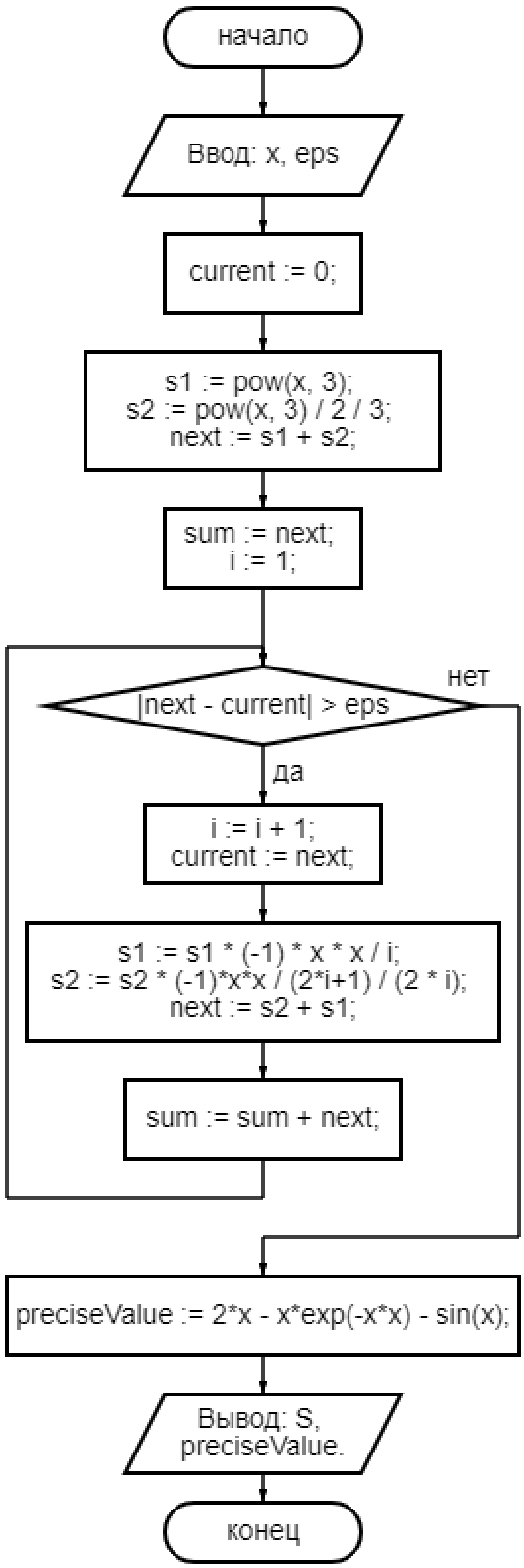


Рис. 2. Блок-схема алгоритма решения

Задание 6. «Шифрование данных»

Условие задачи

Даша и Маша придумали свой секретный шифр. Исходный текст без пробелов делится на части из 15 символов (букв латинского алфавита), которые переставляются по правилу из таблицы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	12	6	11	14	15	10	4	2	1	13	5	8	9	3

То есть символ на позиции 1 перемещается на позицию 7 и т. д.

Даша передала Маше сообщение, зашифрованное таким образом 40 раз. Маша зашифровала его ещё 17 раз. В итоге получилось сообщение «IKSCTIEAPOAEFCE». Помогите Маше его прочитать. В ответе укажите исходный текст без пробелов.

Решение

Таблица представляет собой перестановку, то есть биективное отображение на множестве из 15 элементов.

Циклической перестановкой (циклом) называется перестановка, переводящая элемент $i1$ в $i2$, $i2$ в $i3$, . . ., $ik{-}1$ в ik и ik в $i1$ (пока последний элемент снова не перейдёт в первый). Такой цикл кратко записывается в виде последовательного перечисления всех чисел, участвующих в нём ($i1$, $i2$, ... ik). Откуда начинать цикл значения не имеет.

Любая перестановка представима в виде произведения циклов. Получив первый цикл, берём любое число, не входящее в уже найденный цикл, и находим циклическую перестановку для этого числа. Процедуру повторяем до тех пор, пока не выделим все циклы. Выделенные для данной задачи циклы показаны на рис. 3.

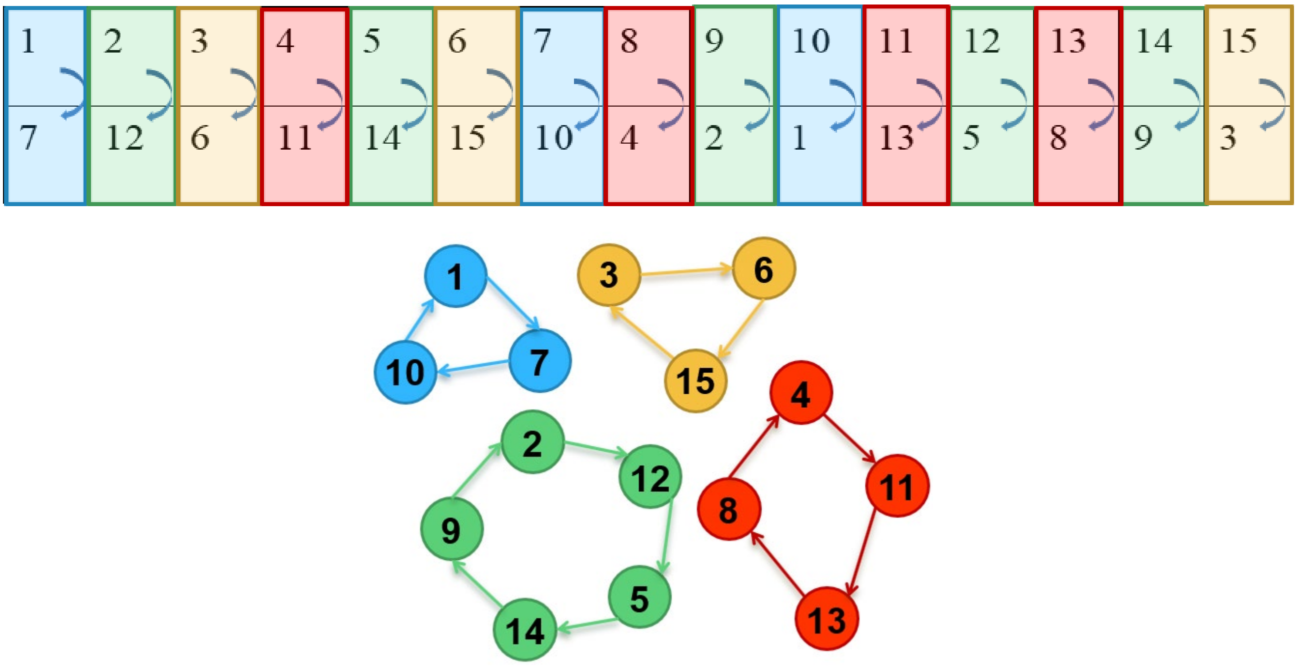


Рис. 3. Выделенные циклы перестановки

Таким образом, имеем перестановку в виде произведения непересекающихся циклов (то есть ни одно число не входит в два цикла сразу):

$$\sigma=(1,7,10)(2,12,5,14,9)(3,6,15)(4,11,13,8).$$

Разложение перестановки в произведение непересекающихся циклов единственно с точностью до изменения порядка сомножителей.

Порядком перестановки называется наименьшее положительное число повторений этой перестановки, возвращающее каждый из переставляемых элементов на место. Порядки циклических перестановок равны их длинам. Порядок для цикла (1,7,10) равен 3. Порядки для остальных циклов равны, соответственно, 5, 3 и 4.

Порядок всей перестановки, представленной в виде произведения независимых циклов (длин $\ell 1$, ... ℓk), будет равен наименьшему общему кратному длин этих циклов

$$\text{ord}\ \sigma = \text{НОК}(3, 5, 3, 4) = 60.$$

Маша и Даша в сумме сделали 40 + 17 = 57 шифрований одной и той же фразы, т.е. 57 перестановок. Для того, чтобы расшифровать эту фразу, достаточно сделать ещё 3 перестановки.

Для циклов длины 3 перестановка получится тождественной (т.е. приводит в исходное состояние), поэтому их можно не учитывать (эти буквы переставлять не требуется).

$$\sigma =[(1,7,10)(2,12,5,14,9)(3,6,15)(4,11,13,8)]^3=$$
$$=(1,7,10)^3(2,12,5,14,9)^3(3,6,15)^3(4,11,13,8)^3=$$
$$=(2,12,5,14,9)^3(4,11,13,8)^3$$

Черным цветом в фразе обозначены буквы, которые не будут переставляться:

IKSCTIEAPOAEFCE .

Вычислим циклы для итоговой перестановки. Для этого применим перестановку в каждом цикле 3 раза. Для цикла из 5 элементов получаем, что 2 переходит после первой перестановки в 12, после второй перестановки – в 5, потом – в 14, т.е. вторым числом в новом цикле запишем 14. Аналогичные действия проводим для остальных чисел. После 14 запишем 12, которое перейдёт в 9, затем – в 5, а 5 вернётся в 2. Получили последовательность (2,14,12,9,5). Для второго цикла новая последовательность будет (4,8,13,11).

$$\sigma =(2,12,5,14,9)^3(4,11,13,8)^3= \mathbf{(2,14,12,9,5)}\ \mathbf{(4,8,13,11)}.$$

Применим новую перестановку. Получится следующая фраза «ITSAPIECEOFCAKE». Проверим правильность новой перестановки, выполнив исходную перестановку 3 раза (рис. 4).

После первой получится фраза «IPSAEIEFCOCKATE», после второй – «ICSFKIEATOAPCEE», после третьей «ITSAPIECEOFCAKE», т.е. имеем такой же ответ. На этом задача решена.

Ответ: ITSAPIECEOFCAKE .

Рис. 4. Применение перестановки 3 раза