МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

Подготовка к прохождению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (номинация «Инженерный класс», конструкторское направление)

Методические рекомендации для учащихся предпрофессиональных классов и учителей профильных предметов (физика, математика, информатика)

Утверждено Факультетом довузовской подготовки

Москва
2022 год

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по решению заданий по предмету «Физика»
в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал», номинация «Инженерный класс», конструкторское направление

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационного варианта по предмету «Физика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Теоретический этап Конкурса проводится в форме компьютерного тестирования. Во время выполнения работы разрешается использовать непрограммируемый калькулятор, таблицу физических величин.

В контрольно-измерительных материалах используются задания базового и повышенного уровня сложности, с выбором одного ответа из нескольких предложенных и с кратким ответом.

Уровень сложности заданий требует от исполнителя следующих привитых умений:

– анализировать и выдвигать предположения;

– составлять уравнения по текстовым формулировкам;

– характеризовать свойства тел, физические явления и процессы, используя физические законы;

– выявлять недостающие или избыточные данные в условии задач, обосновывать выбор метода решения задачи, необходимых законов и формул;

– решать расчётные задачи, выбирая адекватную физическую модель с использованием законов и формул, связывающих физические величины;

– выбирать рациональный способ решения задачи;

– решать алгебраические уравнения и системы;

– последовательно выполнять этапы решения задачи повышенной трудности;

– определять размерность физической величины, полученной при решении задачи;

– анализировать полученный результат.

Предложенные в демонстрационном варианте физические задачи имеют следующие усложнения:

– использование понятий и законов из разных разделов механики, основ молекулярно-кинетической теории, механических колебаний, что делает эти задачи комбинированными и привносит в них межпредметную и прикладную направленность;

– отсутствие в содержании школьного базового уровня темы по расчёту момента инерции тел и периода малых свободных колебаний математического маятника;

– преобразование единиц физических величин в единицы международной системы СИ и в кратные величины с учётом приставок и множителей;

– применение многоступенчатых алгебраических преобразований, требующих решения систем линейных и квадратных уравнений, с последующим вычислением физических величин.

Рекомендуемый алгоритм решения задач:

1. Чтение условия (не менее двух раз). Первое – ознакомительное, второе и последующие (при необходимости) – для выяснения конкретных деталей описанного события, составления или изучения рисунка (схемы) и краткой записи условия с переводом значений всех величин в систему СИ.

2. Проникновение в суть рассматриваемого в условии физического явления: выяснение физической теории, описывающей явление, конкретных законов и принципов, основных формул, охватывающих известные и неизвестные величины, приведенные в условии, и физические константы.

3. Установление физической связи между приведёнными в условии известными и неизвестными величинами посредством системы уравнений, учитывая общее требование: количество уравнений в системе должно быть не меньше общего числа неизвестных физических величин в ней.

4. Решение системы уравнений и получение конечной формулы, выражающей искомую неизвестную величину через известные величины, указанные в условии, и физические константы.

5. Проверка единиц измерения искомой неизвестной величины по полученной формуле с целью проверки правильности полученной формулы.

6. Выполнение численных расчётов, приведение полученного результата к требуемому по условию задачи формату (единицы измерения, способ и разряд округления, и т. п.) и проверка полученного значения.

При краткой записи условия задания необходимо сразу же выяснить размерность физических величин, перевести их в систему СИ. Иногда при решении задания не требуется краткой записи условия задачи. Но это создаст трудности в построении математической модели физической ситуации задачи. Поэтому рекомендуется записывать «Дано» подробно и проводить анализ текста задания, корректный перевод текстовой формы условия физической задачи в математическую форму, правильное указание размерностей физических величин. Если задание решается в общем виде, то последний пункт рекомендаций по записи «Дано» допускается пропустить.

Далее идёт самый сложный этап – построение физической модели ситуации задачи. В физической модели отражается основная идея задания. В большинстве задач из разных разделов физики обязательным является схематическое или графическое изображение физической ситуации, описанной в условии задачи. В предлагаемых заданиях эта модель имеет вид тела (материальной точки), указываются центр масс тела (тел), точки (место) приложения и направления всех физических сил, направления их движения (поступательного и вращательного). Если схема предложена условием задачи, то все усилия должны быть направлены на её анализ с целью построения физической модели (выбора адекватных уравнений).

В результате анализа физической модели необходимо записать базовые формулы физических понятий и законы, которые планируется использовать. Нужно описать каждую вновь вводимую переменную (известную или неизвестную) и указать, какой буквой она обозначается. Участнику должен быть понятен смысл всех физических величин. Особенно это касается тех, которые обозначаются одинаковыми греческими или латинскими буквами (время и температура, электрический заряд и количество теплоты и т. п.). Необходимо их чёткое разграничение для верного подсчёта известных и неизвестных физических величин в задании.

При описании решения должны указываться названия всех законов и границы, в которых они применяются. Важно правильно указать связи между законами, иллюстрировать каждую связь математическими уравнениями. После построения замкнутой системы алгебраических уравнений в явном или неявном виде (знак системы уравнений учащиеся могут не ставить), математическая модель решения задачи считается построенной. Нужно чёткое осознание, что число уравнений, должно быть равно числу неизвестных физических величин.

В дальнейшем решение задачи предполагает работу с алгебраическими уравнениями. На первое место в этом случае ставится знание математических формул, умение их преобразовывать, т.е. собственно математические умения.

Важно объяснить каждую математическую выкладку и логический переход, так, чтобы была понятна логика решения: из какой формулы выражается конкретная физическая величина, куда она подставляется, какие происходят сокращения и преобразования формулы.

На следующем этапе решения задачи получают численное значение физических величин. Нужно проследить, чтобы вновь вводимые при построении модели постоянные были выражены в системе СИ и после проведения расчётов учащиеся получили результат в стандартном виде.

После получения численного результата, его значение проверяется на соответствие физической реальности – результат должен быть разумным, согласовываться с условием задачи, искомая формула иметь соответствующую размерность и находиться в объективных границах этой величины. Необходимо сделать проверку разными способами: по размерности искомой физической величины, по решению задания другим способом и т. п.

Если задание предполагает несколько вариантов решения, то наиболее ценным будет тот, который предполагает самое рациональное решение – наиболее короткое, с одной стороны, и наиболее обоснованное – с другой.

Проведём анализ решения заданий демонстрационного варианта.

Задание №5. В сосуде находится смесь двух газов: 212,48 г кислорода и $8 \cdot 10^{22}$ молекул водорода. Считая массу атома кислорода равной m_a = $26{,}56 \cdot 10^{-27}$ кг, определите отношение количества вещества водорода к количеству вещества кислорода. Ответ представьте в виде десятичной дроби.

Записываем исходные данные с учётом перевода значений величин в систему СИ.

Дано: $m_{O_2} = 212.48 \cdot 10^{-3}$ кг; $N_{H_2} = 8 \cdot 10^{22}$ молекул; $m_a = 26.56 \cdot 10^{-27}$кг.

Найти: $\frac{\nu_{H_2}}{\nu_{O_2}}$.

Вспомним, что моль – одна из семи основных единиц СИ и служит для определения количества вещества. С 2019 года действует новое определение одного моля: один моль – это количество вещества системы, которая содержит $6{,}022140857 \cdot 10^{23}$ специфицированных структурных единиц:

атомов, молекул, ионов, электронов или любых других объектов. Число Авогадро: $N_A = 6{,}022140857 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Если N – это количество специфицированных структурных единиц системы, то количество вещества ν находится по формуле $\nu = \frac{N}{N_A}$.

В данном задании молекула рассматривается как наименьшая химически стабильная частица вещества, обладающая всеми его химическими свойствами.

Молекулы водорода H_2 и кислорода O_2 состоят из двух атомов.

Введём обозначения: N_{H_2} – количество молекул водорода; N_{O_2} – количество молекул кислорода.

Тогда

$$\frac{\nu_{H_2}}{\nu_{O_2}} = \frac{N_{H_2}/N_A}{N_{O_2}/N_A} = \frac{N_{H_2}}{N_{O_2}}.$$

Количество молекул водорода задано в условии. Найдем количество молекул кислорода:

$$N_{O_2} = \frac{N_{\text{атомов кислорода}}}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_{O_2}}{m_a},$$

где m_a – масса атома кислорода;

m_{o_2} – масса находящегося в сосуде кислорода.

Получаем формулу для определения неизвестной величины:

$$\frac{\nu_{H_2}}{\nu_{O_2}} = \frac{N_{H_2}}{N_{O_O}} = \frac{2 \cdot m_a \cdot N_{H_2}}{m_{o_2}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$\frac{\nu_{H_2}}{\nu_{O_2}} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{22} \cdot 26{,}56 \cdot 10^{-27}}{212{,}48 \cdot 10^{-3}} = 0{,}02.$$

По условию задания ответ должен быть представлен в виде десятичной дроби. Полученный ответ удовлетворяет этим требованиям. Таким образом, ответ – 0,02.

При решении данного задания необходимо обратить внимание на вычисления с большими степенями и вспомнить понятие десятичной дроби при записи ответа.

Задание №7. С каким максимальным по модулю ускорением можно поднимать с помощью верёвки тело массой 200 кг, если верёвка выдерживает неподвижный груз максимальной массой 240 кг? Ответ представьте в единицах СИ и округлите до целого числа. Принять значение ускорения свободного падения равным 9,8 м/с^2.

Записываем исходные данные с учётом перевода значений величин в систему СИ.

Дано: $m_1 = 200$ кг; $m_2 = 240$ кг; $g = 9.8$ м/с^2.

Найти: a_1.

Рассмотрим две ситуации: первая – груз неподвижен; вторая – груз поднимается вверх с ускорением a_2 (рисунки 1 и 2).

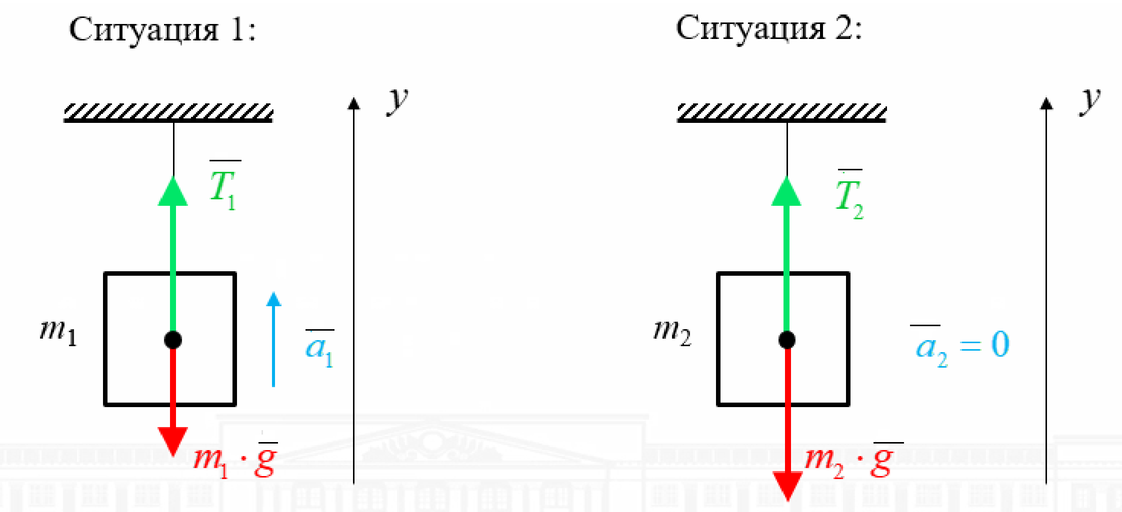


Рисунок 1 Рисунок 2

Выбираем инерциальную систему отсчёта, очевидно, систему отсчёта, связанную с Землёй. Изображаем векторы сил, действующих на тело в каждой ситуации (рисунки 1 и 2), индексы величин обозначают номер ситуации. Применяем второй закон Ньютона при условии, что масса тела m = const:

$$\sum \vec{F_i} = m \cdot \vec{a}.$$

При этом необходимо обратить внимание, что в левой части уравнения указана равнодействующая сил, приложенных к грузу (телу).

Запишем второй закон Ньютона в векторном виде:

для ситуации 1: $\vec{T}_1 + m_1 \cdot \vec{g} = m_1 \cdot \vec{a}_1$;

для ситуации 2: $\vec{T}_2 + m_2 \cdot \vec{g} = m_2 \cdot \vec{a}_2 = 0$, так как груз неподвижен.

Целесообразно направление оси y определить по направлению движения груза. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y:

для ситуации 1: $T_1 - m_1 \cdot g = m \cdot a_1$.

для ситуации 2: $T_2 - m_2 \cdot g = 0$, т.е. $T_2 = m_2 \cdot g$.

При составлении уравнений необходимо правильно расставить знаки сил и ускорений в соответствии с выбранной системой отсчёта и направлением оси y.

Как следует из условия задания, очевидно, что $T_1 = T_2$, так как в обоих случаях сила натяжения будет иметь максимальное значение, которое для одной и той же нити одинаково. Данный момент является ключевым для решения задания и его необходимо пояснять обучающимся на различных примерах.

С учётом изложенного выше

$$m_2 \cdot g - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a.$$

Определяем модуль максимального ускорения:

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1} \cdot g.$$

Подставляем числовые значения:

$$a_1 = \frac{(240-200)}{200} \cdot 9{,}8 = 1{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Так как все числовые значения величин подставлены в выражение в системе СИ, то и ответ получается в единицах системы СИ – м/с^2. По условию задания ответ должен быть представлен в единицах СИ и округлен до целого числа. Приводим ответ к условию задания. Таким образом, ответ – 2 м/с^2.

Задание №9. Шарики малых размеров массами 200 г и 300 г укреплены на концах тонкого однородного стержня длиной 1 м и массой 400 г. Стержень колеблется вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определите период колебаний (в секундах), совершаемых стержнем. Ответ округлите до десятых. Принять значение ускорения свободного падения равным 9,8 м/с^2, значение числа π равным 3,14.

Записываем исходные данные с учётом перевода значений величин в систему СИ.

Дано: $m_1 = 0{,}2$ кг; $m_2 = 0{,}3$ кг; $m_3 = 0{,}4$ кг; $l = 1$ м; $g = 9.8$ м/с^2; π=3,14.

Найти: *T*.

Задание относится к заданиям повышенной сложности, решение которого требует освоения углубленной программы предмета «Физика». Важно для правильного решения задания чётко представлять и разграничивать существующие модели математического (рисунок 3) и физического (рисунок 4) маятников.

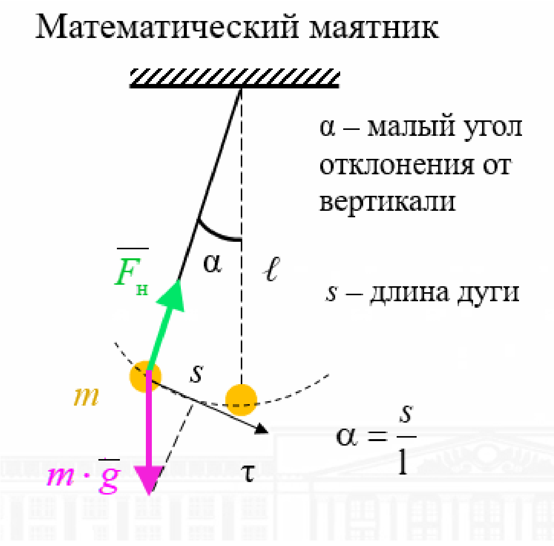


Рисунок 3

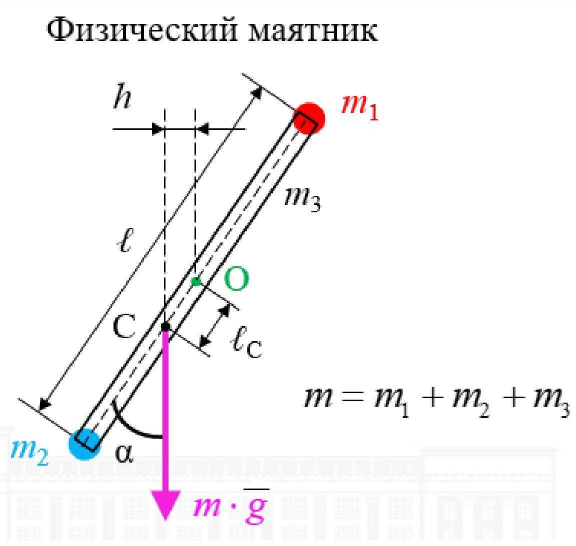


Рисунок 4

Проведем анализ колебательной системы, представленной по условию задания. Имеем два шарика массами *m₁* и *m₂*, будем считать их материальными точками, так как в условии задания их размеры не указаны, более того, сказано, что они представляют собой шарики малых размеров. Стержень массой m_3 имеет длину $l = 1$ м, что не позволяет его принять материальной точкой. Таким образом, мы имеем твёрдое тело, состоящее из стержня и двух шариков на его концах. Если стержень рассмотреть отдельно, то его центр масс совпадает с его серединой (точкой О на рисунке 4). Ось вращения по условию задания так же проходит через точку О. Так как на концах стержня имеются шарики разной по величине массы, то центр масс системы тел не будет находиться в точке О. Очевидно, что он будет смещён к шарику с большей массой, например, к точке С. Таким образом, система тел представляет собой физический маятник, который совершает колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку О под действием силы тяжести. Если пренебречь силами трения, то мы получим незатухающие гармонические колебания.

Необходимо вывести формулу для расчёта периода колебаний данного физического маятника. С этой целью решим вспомогательное задание и определим период колебаний математического маятника, представленного на рисунке 3, и состоящего из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой и невесомой нити длиной l. Изображаем векторы сил, действующих на материальную точку массой m математического маятника (силы натяжения нити и силы тяжести). Отклоним маятник на некоторый угол α, выведя её из системы равновесия. Материальная точка будет двигаться по дуге l слева направо. Проводим ось τ и её направление, совпадающее с направлением движения материальной точки.

В проекции на ось τ второй закон Ньютона запишется в виде выражения $F_\tau = m \cdot a_\tau = -m \cdot g \cdot sin\alpha$, где a_τ – тангенциальное ускорение материальной точки. Таким образом, $a_\tau = -g \cdot sin\alpha \approx -g \cdot \alpha$. Знак минус в выражении показывает противоположность направления отклонения нити и направления движения материальной точки.

Необходимо помнить, что $a_\tau = \ddot{s}$, $a_\tau = \ddot{\alpha} \cdot l$, а дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний имеет вид: $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \cdot \alpha$.

Так как квадрат циклической частоты колебаний $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, то выражение для периода колебаний маятника:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0^2} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Вернёмся к исходной колебательной системе – физическому маятнику. При выводе из состояния равновесия данная система также будет совершать незатухающие гармонические колебания под действием момента силы тяжести системы, так как её центр масс не совпадает с осью вращения.

Аналогом второго закона Ньютона во вращательном движении является основное уравнение динамики вращательного движения $M = J_0 \cdot \varepsilon$. Если плечо силы тяжести представить в виде выражения $h = l_{\text{С}} \cdot sin\alpha$, то момент силы тяжести можно представить в виде:

$$M = -m \cdot g \cdot h = -m \cdot g \cdot l_{\text{С}} \cdot sin\alpha \approx -m \cdot g \cdot l_{\text{С}} \cdot \alpha.$$

Знак минус в данном выражении, аналогично математическому маятнику, показывает противоположное направление вектора момента силы тяжести системы и угла отклонения маятника.

Основное уравнение динамики вращательного движения запишем в виде:

$$J_0 \cdot \varepsilon = -m \cdot g \cdot l_{\text{С}} \cdot \alpha.$$

Выразим угловое ускорение ε:

$$\varepsilon = -\frac{m \cdot g \cdot l_{\text{С}} \cdot \alpha}{J_0}.$$

Данное уравнение совпадает с уравнением для математического маятника. Отличие заключается в наличии множителя $\frac{m \cdot g \cdot l_{\text{С}}}{J_0}$.

Выражения для периода и циклической частоты колебаний примут вид:

$$\omega_0^2 = \frac{m \cdot g \cdot l_{\text{С}}}{J_0}$$

и

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_0}{m \cdot g \cdot l_{\text{С}}}},$$

где масса маятника представляет собой алгебраическую сумму масс двух шаров и стержня: $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Важно пояснить и представить, что задача сводится к решению двух подзадач:

– нахождению положения центра масс l_C системы тел;

– нахождению момента инерции J_0 системы тел относительно оси вращения, проходящей через точку O (рисунок 4).

Представим на схеме систему тел (два шарика и груз) и определим направление оси y (рисунок 5).

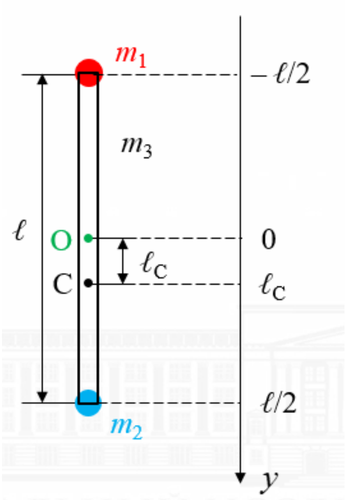


Рисунок 5

Необходимо напомнить определение положения центра масс системы тел. С учётом условий задания, положение центра масс системы тел вычисляем по формуле:

$$y_c = l_C = \frac{m_1 \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) + m_2 \cdot \left(\frac{L}{2}\right) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_{13}} = \frac{(m_2 - m_1) \cdot l}{2 \cdot (m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Подставляем числовые значения:

$$l_C = \frac{(0{,}3 - 0{,}2) \cdot 1}{2 \cdot (0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}4)} = \frac{1}{18} \text{ м.}$$

Ответ целесообразно оставить в виде дроби для упрощения дальнейших расчётов.

Важно вспомнить, что момент инерции – величина, обладающая свойствами аддитивности, как и масса. Поэтому момент инерции маятника J_0

равен сумме моментов инерции шариков J_{01}, J_{02} и момента инерции стержня J_{03}. Моменты инерции шариков (материальных точек) определяем, исходя из длины стержня l, по формуле:

$$J_0 = m_{\text{м.т.}} \cdot r^2.$$

Тогда $J_{01} = m_1 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2$ и $J_{02} = m_2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2$.

Момент инерции стержня определяем с помощью выражения $J_{03} = \frac{1}{12} \cdot m_3 \cdot l^2$, которое примем как известное.

Таким образом, искомый момент инерции маятника определяем по формуле:

$$J_0 = m_1 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot m_3 \cdot l^2.$$

Подставляем числовые значения:

$$J_0 = 0{,}2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0{,}3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}4 \cdot 1^2 = \frac{19}{120}\ \text{кг·м}^2.$$

Как и ранее, ответ целесообразно оставить в виде дроби для упрощения дальнейших расчётов.

Подставляем числовые значения в зависимость для расчёта периода колебаний нашего физического маятника:

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{\frac{19}{120}}{0{,}9 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1}{18}}} = 3{,}56983\ \text{с}.$$

По заданию требуется определить период колебаний (в секундах) и округлить ответ до десятых. Приводим ответ к условию задания. Таким образом, ответ: $T \approx 3{,}6$ с.

Для решения данного задания необходимо знать и чётко представлять понятие момента инерции материальной точки (твёрдого тела), центра масс системы тел, знать выражения для расчёта центра масс, моментов инерции типовых твёрдых тел (стержня, шарика, диска и т. п.), и уметь их рассчитывать.

В процессе подготовки учащихся к решению аналогичных задач необходимо повторить основные понятия, законы и формулы:

– основы молекулярно-кинетической теории идеального газа;

– масса молекул, количество вещества, постоянная Авогадро;

– определения ускорения, силы и массы физических тел, свободного падения и ускорения свободного падения, импульса тел, работы силы, силы трения;

– законы Ньютона для материальной точки в инерциальных системах отсчёта;

– колебательная система, свободные колебания, период, амплитуда и частота колебаний;

– кинематическое и динамическое описание гармонических колебаний, в т. ч. математического и физического маятников;

– сущность центра масс механической системы;

– законы сохранения механической энергии и Архимеда.

Московский конкурс межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»

в номинации «Инженерный класс» по конструкторскому направлению

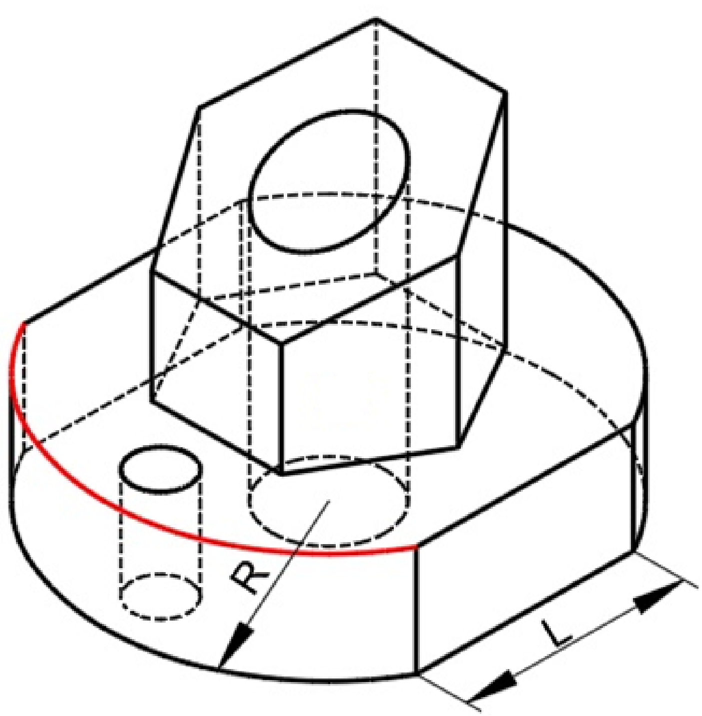
Теоретический этап
Методические рекомендации

Задания по математике

Задания части 1

Три первых задания, составляющих часть 1 демоварианта, связаны с анализом изображений на плоскости трёхмерных объектов. По формальным признакам в этих заданиях можно найти элементы технического черчения (или инженерной графики), однако для их решения вполне достаточно навыков, приобретаемых при изучении школьного курса стереометрии, а также умения разбираться в расположении стандартных видов (вид спереди, вид слева, вид сверху) на чертеже.

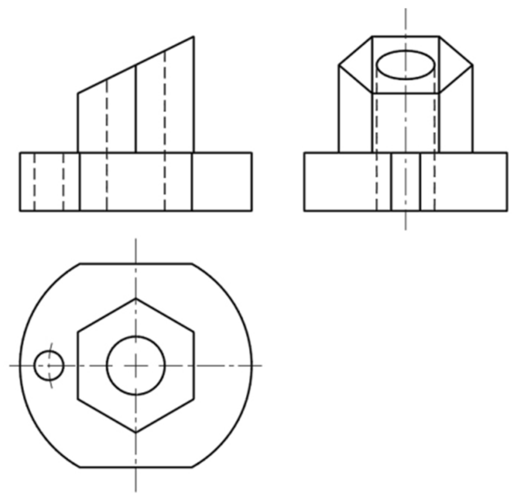
Для всех трёх заданий дана следующая аксонометрическая проекция некоторой детали.



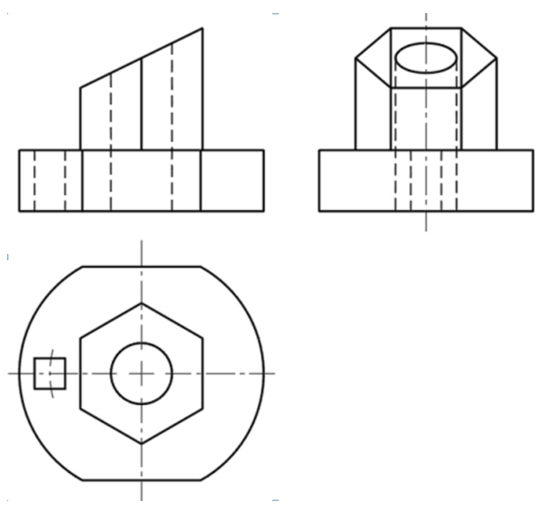
Задание 1

Выберите изображение в трёх проекциях (стандартные виды), соответствующее заданной аксонометрической проекции.

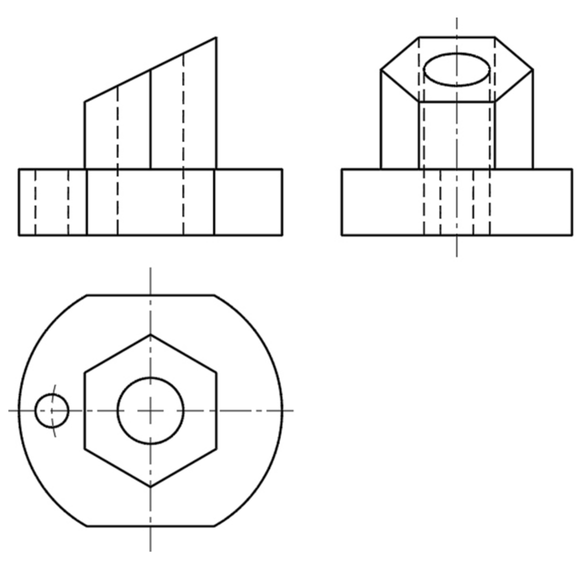
1)



2)

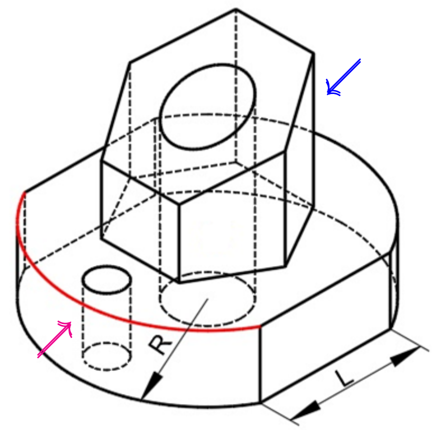


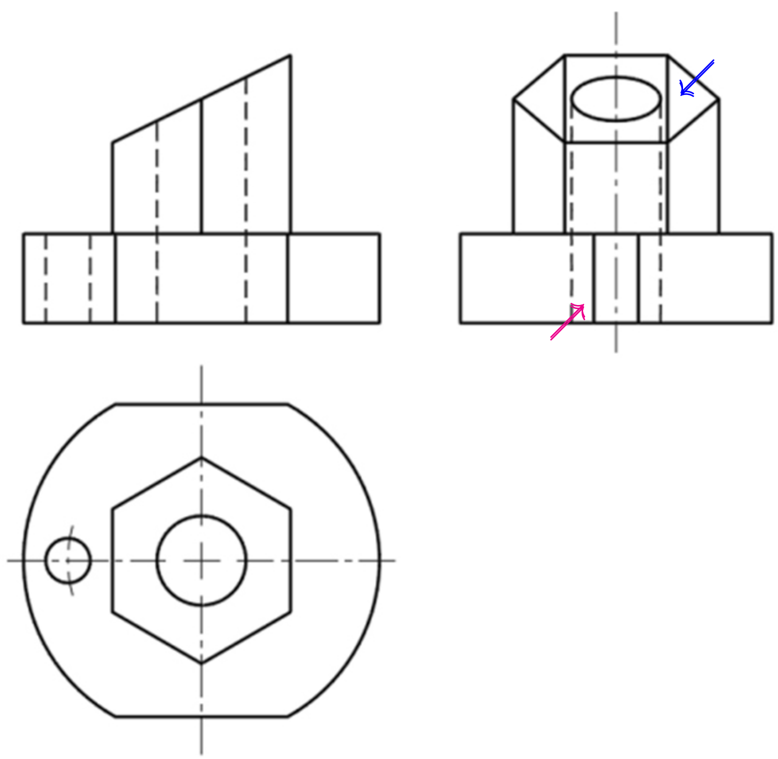
3)



Разберём каждый вариант отдельно, отметив на нём несоответствия (если таковые имеются). Для наглядности вместе с тремя видами поместим аксонометрическое изображение детали.

1)

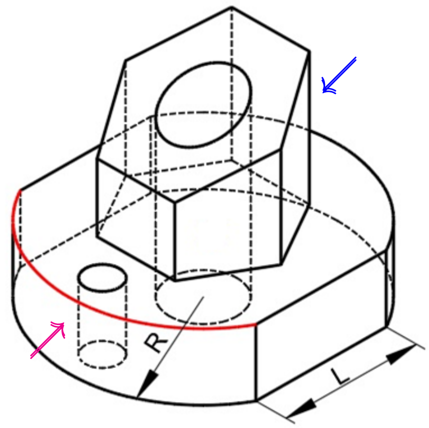


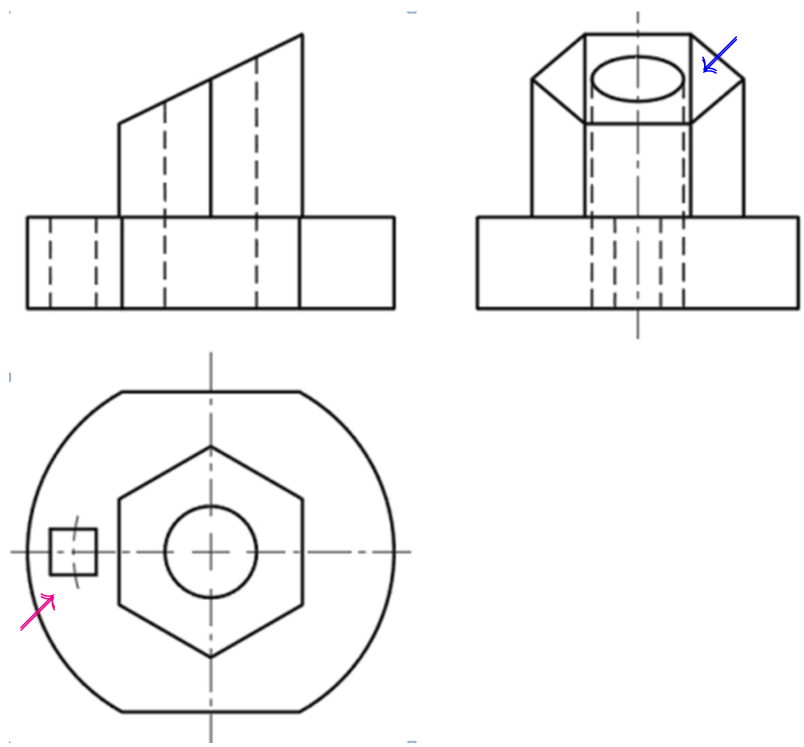


Во-первых, видно несоответствие в изображении наиболее длинных вертикальных рёбер призмы в верхней части детали: на виде слева они должны быть невидимы, но обозначены сплошными линиями (это несоответствие помечено синими стрелками).

Во-вторых, видно несоответствие в изображении малого сквозного отверстия в основании детали: на том же виде слева оно также должно быть невидимым, но обозначено сплошными линиями (это несоответствие помечено красными стрелками).

2)

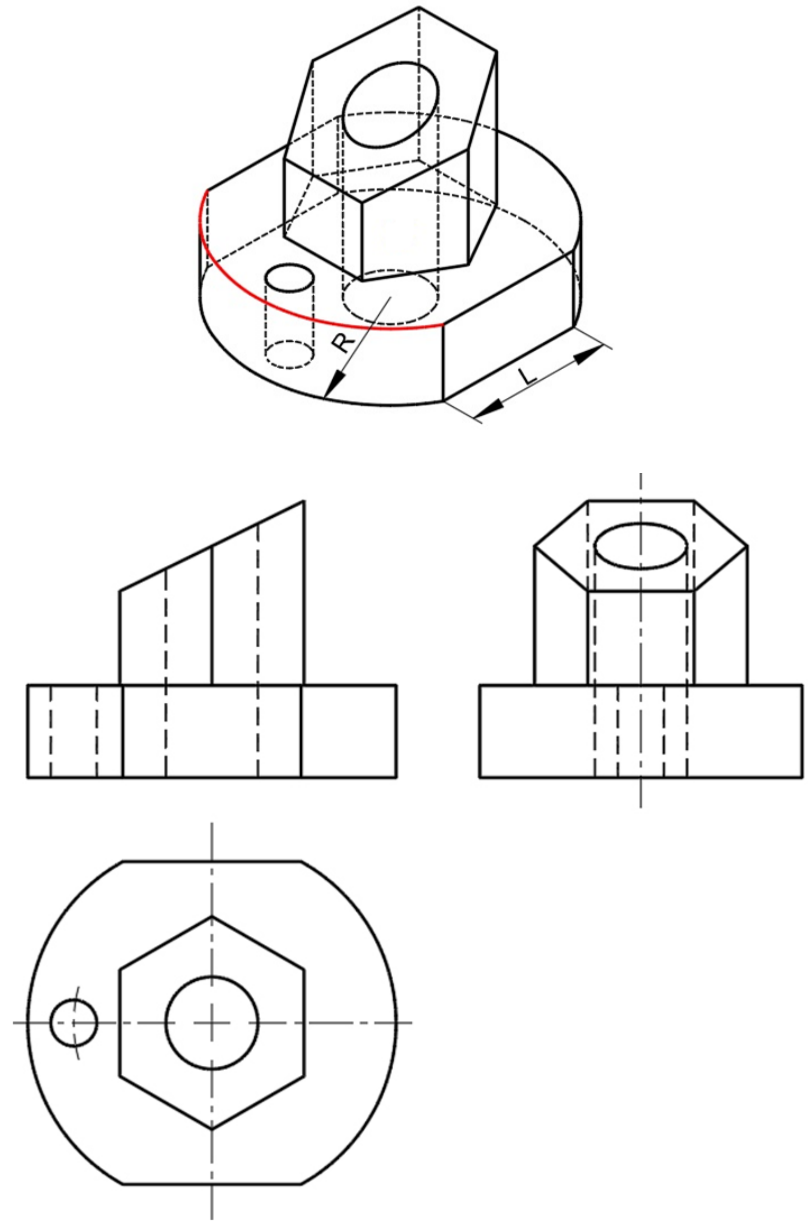




Во-первых, видно несоответствие в изображении наиболее длинных вертикальных рёбер призмы в верхней части детали: на виде слева они должны быть невидимы, но обозначены сплошными линиями (это несоответствие помечено синими стрелками).

Во-вторых, видно несоответствие в изображении малого сквозного отверстия в основании детали: на виде сверху оно имеет квадратное сечение, в то время как должно быть круглым (это несоответствие помечено красными стрелками).

3)



На данном изображении отсутствуют как отмеченные выше несоответствия, так и какие-либо иные. Этот вариант ответа верный.

Ответ: 3.

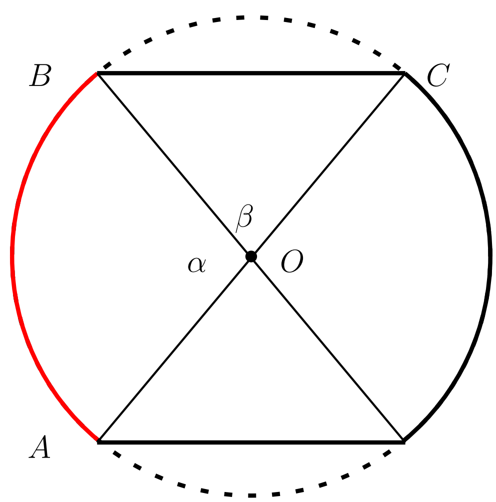
Задание 2

Найдите длину дуги, выделенной красным цветом, если $R = L = 18/\pi$.

Решение

Данная задача является планиметрической, поскольку все данные и искомый элемент расположены в плоскости верхнего основания нижней части детали. Этой частью является прямой круговой цилиндр, от которого отрезаны две симметричные части.

Верхнее основание такого тела будет представлять собой круг, от которого отсечены два равных сегмента, расположенных симметрично. Изобразим описанную фигуру. Искомый элемент выделим красным.



Рассмотрим $\triangle BCO$. Его стороны OB и OC равны друг другу и радиусу окружности. Согласно условию, сторона BC также равна радиусу, следовательно, $\triangle BCO$ равносторонний и угол $\beta = \frac{\pi}{3}$ (обозначения см. на рисунке).

Угол α дополняет угол β до прямого, поэтому $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Остаётся применить формулу длины дуги окружности по известному её центральному углу и радиусу: $\smile{AB} = R\alpha = \dfrac{18}{\pi} \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 12$.

Ответ: длина дуги $\smile{AB}$ равна 12.

Методические комментарии

Имеет смысл рассмотреть более общий случай $L \neq R$ и вывести соответствующую формулу $\smile{AB} = R \cdot \left(\pi - 2\arcsin \frac{L}{2R}\right)$.

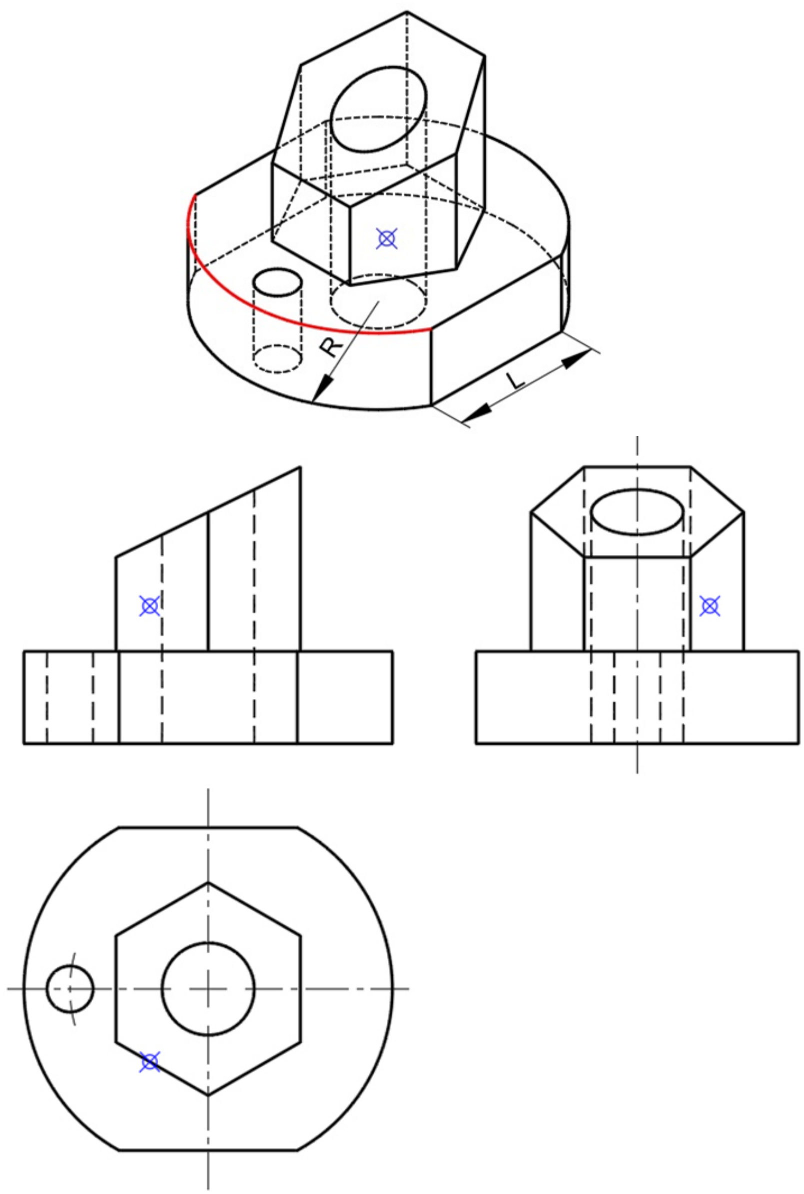
Задание 3

На поверхности призмы задана точка. На каком из приведенных ниже изображений все проекции этой точки найдены правильно?

Решение

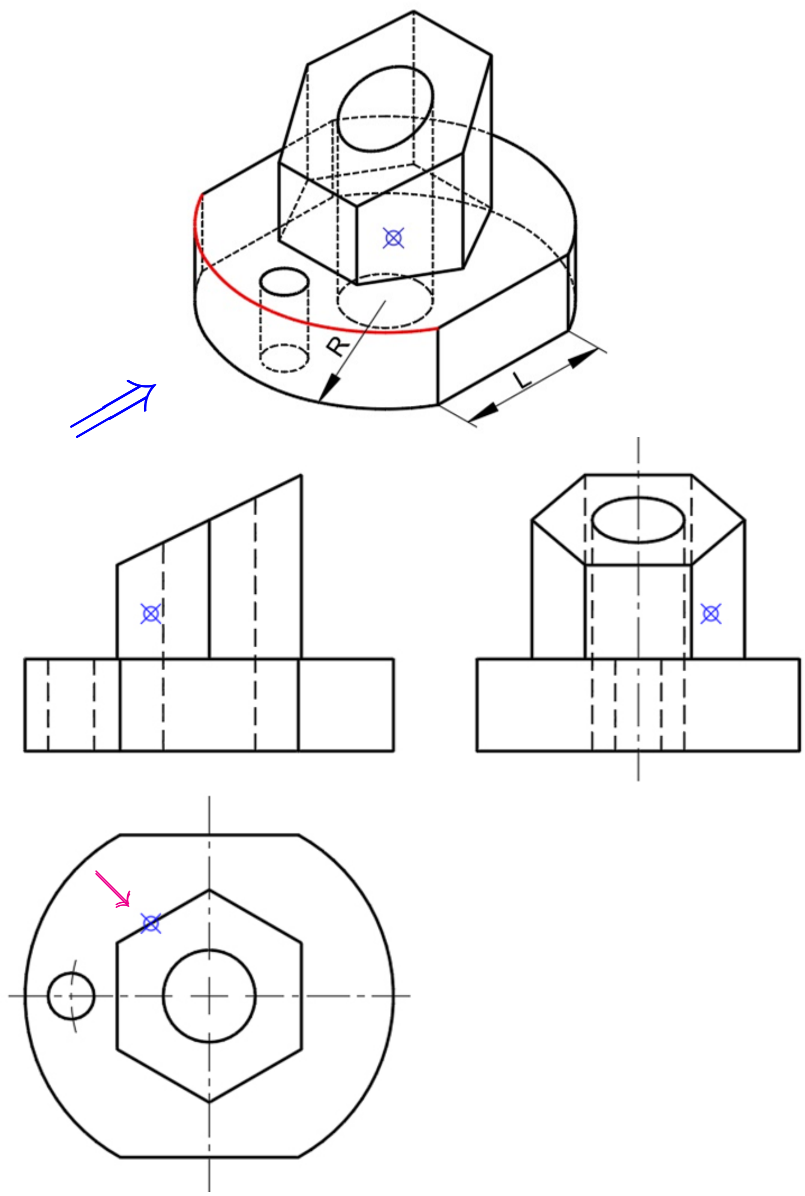
Разберём каждый вариант отдельно, отметив на нём несоответствия (если таковые имеются). Для наглядности вместе с тремя видами поместим аксонометрическое изображение детали с отмеченной точкой.

А)



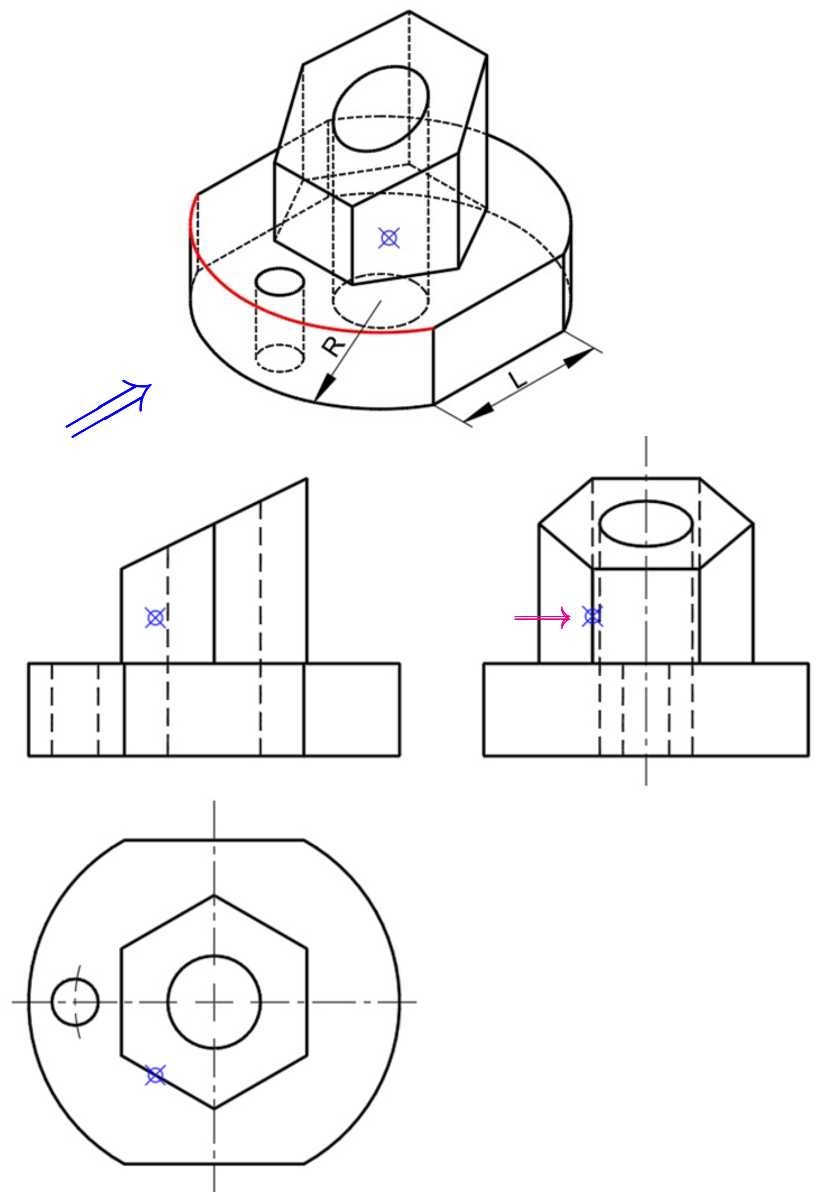
На представленных в варианте А) изображениях несоответствия не наблюдаются. Убедимся, что они присутствуют в других вариантах.

Б)



Несоответствие можно обнаружить на виде сверху (отмечено красной стрелкой). При взгляде на деталь слева (по направлению, указанному двойной синей стрелкой) точка должна быть видна в правой части детали, однако при соответствующем взгляде на вид сверху точка оказывается на левой части детали.

В)



Несоответствие можно обнаружить на виде слева (отмечено красной стрелкой). Во-первых, при взгляде на деталь слева (по направлению, указанному двойной синей стрелкой) точка должна быть видна в правой части детали, однако на обсуждаемом виде она стоит на левой части детали.

Во-вторых, точка стоит на грани усечённой призмы, а на виде слева она изображена на ребре этой призмы.

Таким образом, варианты ответа Б) и В), в отличие от варианта А), содержат ошибки.

Ответ: А.

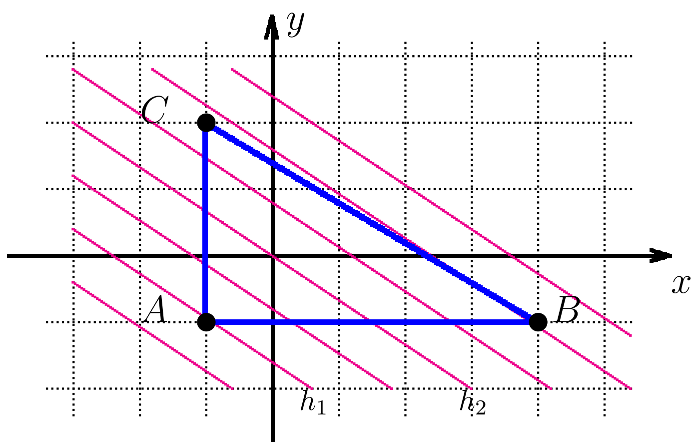
Задание 8

Точка M с координатами (x, y) может перемещаться по контуру треугольника с вершинами $A(-1, -1)$, $B(4, -1)$ и $C(-1, 2)$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + 3y$?

Решение

Изобразим заданный треугольник ABC (на рисунке ниже одна клеточка соответствует единице).

Обозначим через $z(x, y) = 2x + 3y$ функцию, максимальное значение которой требуется найти. Рассмотрим линии уровня этой функции, т.е. линии на плоскости XOY, определяемые уравнениями $2x + 3y = h$ при всевозможных значениях h. На рисунке они проведены красным.



На каждой из линий уровня фукция z не изменяется и принимает одно и то же значение h. Для поиска этого значения можно выбрать произвольную (удобную для подсчёта) точку. Например, отмеченное на рисунке значение h_1 отрицательно, а значение h_2 равно нулю.

Путём такого сравнения убеждаемся, что чем правее и выше (в плоскости XOY) лежит линия уровня, тем большее значение h принимает на ней функция z.

Поскольку все стороны треугольника ABC пересекают линии уровня, то при перемещении точки вдоль любой стороны значение функции z будет меняться монотонно. Следовательно, её наибольшее и наименьшее значение будет достигаться в вершине треугольника.

Анализируя взаимное расположение вершин и линий уровня, видим, что наибольшее значение достигается в вершине B. Вычисляем

$$\max_{(x,y)\in ABC} z(x,y) = z(x_B, y_B) = 5.$$

Ответ: 5.

Методические комментарии

Задача кажется сложной до тех пор, пока не происходит осознание её геометрического подтекста. После этого достаточно представить в уме трёхмерную картину, и ситуация проясняется.

В описанном выше решении намеренно не использовались понятия аналитической геометрии. Можно привлечь их и начать рассуждения с того факта, что уравнение $z = 2x+3y$ задаёт в пространстве некоторую плоскость. Далее, можно построить усечённую призму с заданным треугольником в нижнем основании и частью плоскости $z = 2x+3y$ в верхнем. Наиболее «высокая» точка верхнего основания будет над вершиной B.

Любые другие трёхмерные построения, связывающие треугольник ABC в плоскости XOY и часть поверхности, задаваемой функцией $z(x,y)$, как представляется, должны облегчать понимание и решение данной задачи.

Задача также может быть решена сугубо алгебраическими методами. Для этого нужно выразить x через y (или наоборот) для каждой стороны треугольника и подставить найденное выражение в формулу функции $z(x,y)$, получив тем самым функцию одной переменной. Полученная функция будет линейна, её максимум легко находится. Наконец, из трёх найденных максимумов (каждый для своей стороны) нужно найти наибольший.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по решению заданий по предмету «Информатика»

в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал», номинация «Инженерный класс», конструкторское направление

Задание 4. «Расчёт параметров электрической цепи»

Условие задачи

В электрической цепи имеются источник постоянной ЭДС 15 В с внутренним сопротивлением 10 Ом и переменное сопротивление, амперметр и вольтметр.

Есть система, считывающая показания приборов и регистрирующая результат в электронно-вычислительной машине (ЭВМ). Однако, по техническим причинам, иногда возникают ложные считывания, и была разработана специальная программа, подтверждающая достоверность показаний, которая на вход получает значения I – измеренный ток и U – измеренное напряжение, а на выходе выдаёт значение логической переменной.

$$Result = \begin{cases} \textit{Истина} \text{ – корректное измерение;} \\ \textit{Ложь} \text{ – некорректное измерение.} \end{cases}$$

Определите правильный вариант алгоритма с корректным условным оператором для указанной программы, подтверждающей достоверность показаний.

1) Result := Ложь

   ЕСЛИ 15-10*I-U == 0, ТО Result := Истина

2) Result := Истина

   ЕСЛИ 15-10*I-U == 0, ТО Result := Ложь

3) Result := Ложь

   ЕСЛИ 15+10*I == U, ТО Result := Истина

4) Result := Ложь

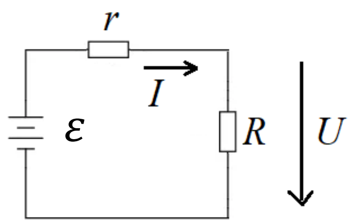
ЕСЛИ 10*I*I == U*15, ТО Result := Истина

Решение

Закон Ома для полной цепи: ЭДС источника ε равна сумме падений напряжений на внутреннем сопротивлении r и резисторе R:

$$\varepsilon = rI + RI.$$

При этом, для резистора справедлив закон Ома: $U = RI$



С учётом заданных значений: $15 = 10I + U$ или $15 - 10I - U = 0$

Вывод – выражения 3 и 4 неверны.

Если считанные значения U и I соответствуют закону Ома для полной цепи, то результаты измерений корректны и Result = Истина, а иначе Result = Ложь. Отсюда следует, что выражение 2 даёт противоположный действительности результат.

Ответ: верный вариант программы – 1.

Задание 6. «Задача на IP-адресацию»

Условие задачи

По заданным IP-адресу узла и маске определите адрес сети.

- IP-адрес узла: 17.221.123.11
- Маска: 255.255.128.0

Решение

IP-адрес состоит из четырёх частей (октетов), записанных в виде десятичных чисел с точками. Каждый октет может принимать в десятичном виде значения от 0 до 255 или в двоичном виде – от 0000 0000 до 1111 1111.

Например, IP-адрес узла 17.221.123.11 будет выглядеть так: 00010001.11011101.01111011.00001011 .

Количество двоичных цифр в IP-адресе, которые приходятся на номер сети, и количество цифр в адресе, приходящееся на идентификатор узла, могут быть различными в зависимости от маски сети.

Маска подсети может также быть представлена в двоичном виде. Она включает в себя 32 бита. Если бит в маске подсети равен «1», то соответствующий бит IP-адреса является частью адреса сети. Если бит в маске подсети равен «0», то соответствующий бит IP-адреса является частью идентификатора узла.

Для нашего примера маска 255.255.128.0 будет выглядеть так: 11111111.11111111.10000000.00000000 .

Маску подсети можно определить как количество бит в адресе, представляющих номер сети (количество бит со значением «1»). В нашем примере имеем 17-битную маску. Поскольку маска всегда является последовательностью единиц слева, дополняемой серией нулей до 32 бит, можно просто указывать количество единиц, а не записывать значение каждого октета. Обычно это записывается как «/» после адреса и количество единичных бит в маске.

Таким образом, применив логическую операцию конъюнкции, получаем адрес сети в двоичном виде (рис. 1).

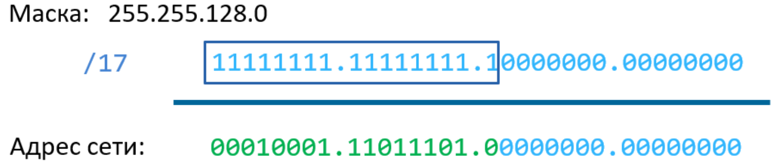


Рис. 1. Вычисление адреса сети по IP-адресу узла и маске подсети

Переведём адрес сети в десятичный вид. Получим 17.221.0.0, что и запишем в ответ.

Ответ: 17.221.0.0 .

Задание 10. «Задача о белках-воришках»

Условие задачи

На двух соседних деревьях живут 12 и 15 белок соответственно, при том каждая – в своём дупле (рис. 2). Белки очень жадные и постоянно воруют орехи у жителей соседнего дерева. Чтобы белку не поймали, она сначала ворует орех из любого дупла на чужом дереве, потом бежит в другое дупло на чужом дереве, а затем возвращается домой. Найдите общее количество различных путей для белок-воришек на этих двух деревьях.

Примечание. Последовательность посещения дупел на чужом дереве неважна, т. е. путь белки из своего дупла под номером 1 в чужое дупло под номером 2, а потом в чужое дупло под номером 3 и обратно домой (1-2-3-1) идентичен пути 1-3-2-1 (рис. 3). В ответе к задаче идентичные пути не должны учитываться дважды.

Решение

Способ 1. Рассмотрим для начала более простой случай с меньшим количеством белок: 2 – на одном дереве и 3 – на другом (рис. 4).

Белка с первого дерева может побежать в одно из трёх дупел второго дерева. После этого у неё останется два дупла, в которые можно забежать на обратном пути. Итого $3 \times 2 = 6$ вариантов, но количество неидентичных путей в 2 раза меньше, т.е. остаётся 3 варианта.

Белка со второго дерева может побежать сначала в одно из двух дупел первого дерева, после чего у неё останется только одно дупло, в которое можно забежать на обратном пути. Таким образом, получается 2 варианта, но они считаются идентичными, т.е. считаем их как 1 вариант.

Рис. 2. Правила для белок

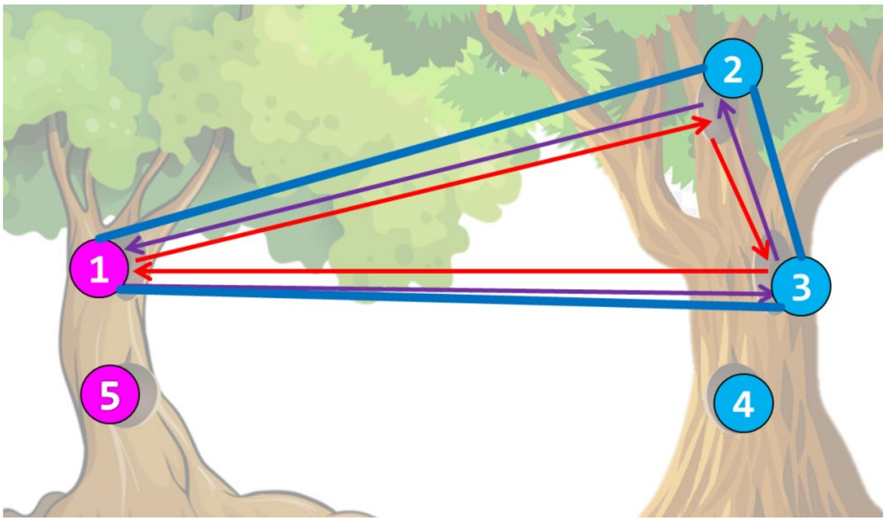


Рис. 3. Идентичные пути (красный и фиолетовый) считаем за один (синий)

Номер белки	1	2	3	4	5	Всего
Количество путей	3	1	1	1	3	9

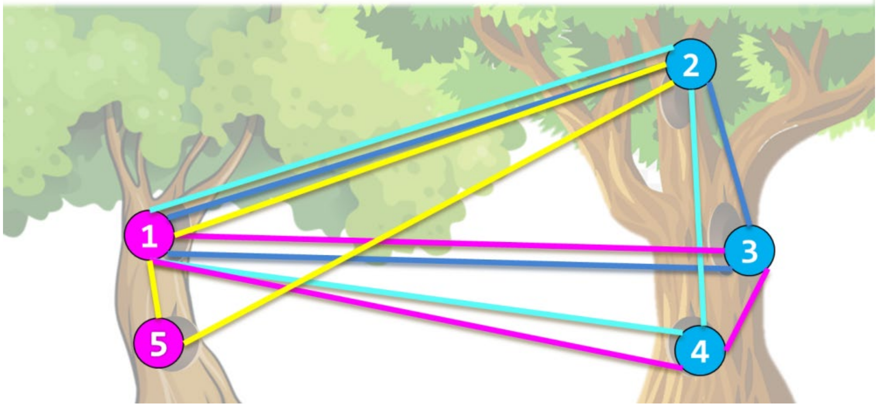


Рис. 4. Неидентичные пути для белок 1 и 2

В итоге, для каждой из двух белок первого дерева есть по 3 пути, и для каждой из трёх белок второго дерева есть по одному пути. Всего получается $2 \times 3 + 3 \times 1 = 9$ путей.

Теперь рассмотрим задачу в общем виде. На первом дереве живёт N белок, на втором – M белок. Каждая белка с первого дерева может побежать в одно из M дупел второго дерева, затем в одно из оставшихся $(M - 1)$ дупел того же второго дерева (рис. 5). Всего белок на первом дереве N, и с учётом того, что количество неидентичных путей в 2 раза меньше, получаем $N \times M \times (M - 1) / 2$.

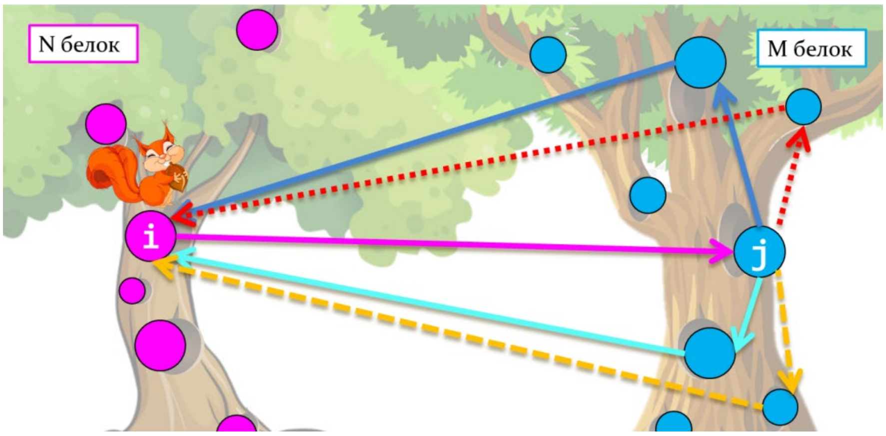


Рис. 5. Пути для i-й белки с первого дерева утащить орех из j-го дупла второго дерева

Аналогично для белок второго дерева: $M \times N \times (N - 1) / 2$.

И в сумме $N \times M \times (M - 1 + N - 1) / 2$.

При $M = 15$ и $N = 12$ получаем $12 \times 15 \times (15 - 1 + 12 - 1) / 2 = 2250$.

Ответ: 2250.

Способ 2. Можно решить эту задачу по-другому. Путь белки можно представить в виде треугольника, одна вершина которого лежит на дереве, где белка живёт, а две другие – на другом дереве. Каждой белке надо выбрать два дупла на чужом дереве, в которые она забежит. Количество способов выбрать 2 дупла-вершины на чужом дереве есть число сочетаний из общего количества вершин на чужом дереве V по две. Количество всевозможных треугольников, которые можно построить при условии, что 2 вершины принадлежат чужому дереву, равно числу сочетаний из V по 2, умноженному на K, где K – количество вершин на своём дереве.

Из комбинаторики известно, что число сочетаний из V по 2 определяется по формуле $C_V^2 = \dfrac{V!}{2! \cdot (V-2)!} = \dfrac{V \cdot (V-1) \cdot (V-2)!}{2! \cdot (V-2)!} = \dfrac{V \cdot (V-1)}{2}$.

Тогда для 15 и 12 белок получаем $C_{15}^2 \cdot 12 + C_{12}^2 \cdot 15 = \dfrac{15 \cdot 14}{2} \cdot 12 + \dfrac{12 \cdot 11}{2} \cdot 15 =$ $= 105 \cdot 12 + 66 \cdot 15 = 2250$.

Используя формулы комбинаторики, мы получили такой же результат, что и в первом случае.

Ответ: 2250