Методические рекомендации по теоретической части
Московского конкурса межпредметных навыков и знаний

Московский конкурс межпредметных навыков и знаний
«Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ЭКЗАМЕНА

академические классы

информационно-технологическое направление

МАТЕМАТИКА

Авторы:
Власова Е.А.,
доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
Пугачев О.В.,
профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
Васильева Д.С.,
старший преподаватель кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Москва 2022

Методические рекомендации по теоретической части
Московского конкурса межпредметных навыков и знаний

Введение

Формирование жизненных и предпрофессиональных умений – первостепенная задача системы образования. Выпускник должен уметь применять знания в реальной жизни, ориентироваться в большом объеме информации и самостоятельно получать новые знания, разрабатывать реальные и необходимые проекты и презентовать инновационные идеи.

Проект «Академический класс в московской школе» ставит своей задачей предпрофессиональную подготовку будущего инженера. В рамках проекта обучающиеся образовательных учреждений общего среднего образования получают углубленные знания по учебным дисциплинам, на основе которых они смогут успешно обучаться в инженерном ВУЗе. Экскурсии на кафедры ВУЗов и на производственные предприятия дают возможность познакомиться с характером инженерной деятельности, производственная практика в рамках проекта позволяет включиться в деятельность предприятия или лаборатории, а выполнение проекта инженерно-технической направленности формирует умения, необходимые в дальнейшей работе. Все это вместе взятое осуществляет профессиональную навигацию обучающихся и ориентирует их на осознанный выбор будущей профессии.

По окончании обучения в рамках проекта «Академический класс в московской школе» предусмотрена итоговая диагностика. Московский конкурс межпредметных навыков и знаний – форма независимой итоговой оценки с участием представителей вузов, которая проводится по результатам освоения обучающимися предпрофессиональных профильных программ в академических классах. В настоящих методических указаниях рассматриваются вопросы подготовки обучающихся к теоретическому этапу предпрофессионального экзамена в форме компьютерного тестирования.

Материалы теоретической Конкурса межпредметных навыков и знаний предназначаются для определения уровня освоения выпускниками инженерных классов знаний, умений, ключевых компетенций образовательных программ профильных предметов и элективных курсов. При разработке контрольно-измерительных материалов было учтено, что инженерный труд предусматривает работу с информацией, представленной в самых разных формах: вербально-текстовой, знаково-символьной, в частности, формульной и табличной, графической, символьно-графической. При этом современные средства отображения информации часто выдают результат как интеграцию указанных форм.

Другой особенностью контрольно-измерительных материалов является их метапредметный характер, также вытекающий из требований к будущей профессии инженера. В контрольно-измерительных материалах в рамках одного задания объединяются вопросы, относящиеся, в основном, к трем предметным областям: математике, физике и информатике. При этом задача с физико-техническим содержанием может потребовать высокой математической культуры, а задача, относящаяся к проблемам обработки информации, опирается на хорошие естественнонаучные знания.

Структура экзаменационной работы теоретической части предпрофессионального экзамена

Вариант экзаменационной работы, представляемый каждому обучающемуся, автоматически формируется из базы проверочных заданий в соответствии с планом экзаменационной работы и состоит из двух частей.

Часть 1 включает в себя 4 задания на проверку функциональной грамотности.

Часть 2 включает 11 заданий, позволяющих проверить фундаментальные знания по профильным предметам (математика, физика и информатика) и универсальные умения участника испытания.

За выполнение каждого задания выставляется 4 балла, если ответ обучающегося совпал с эталоном, иначе - 0 баллов. Задание считается выполненным, если ответ обучающегося совпал с эталоном. Таким образом, максимальный балл за выполнение всей работы – 60 баллов.

Для более подробного знакомства со структурой экзаменационной работы можно воспользоваться спецификацией и планом демонстрационного варианта работы.

План демонстрационного варианта теоретической части экзаменационной работы

№ задания	*Дисциплина*	*Проверяемые темы*	*Балл*
1.	Физика	Механические колебания	4
2.	Физика	Цепи переменного тока	4
3.	Физика	Электрический ток в вакууме	4
4.	Информатика	Механика. Решение задач по кинематике и динамике	4
5.	**Математика**	**Построение логических связей и цепочек рассуждений**	**4**
6.	**Математика**	**Комбинаторика, основы теории вероятностей**	**4**
7.	Информатика	Гидростатика и гидродинамика	4
8.	Информатика	Законы сохранения в механике	4
9.	Информатика	Преобразование модели из одной системы представления в другую	4
10.	**Математика**	**Экстремальные задачи по геометрии**	**4**
11.	Физика	Геометрическая оптика	4
12.	**Математика**	**Основы теории множеств/теории графов**	**4**
13.	**Математика**	**Решение задач на числа (делимость, игры, процессы)**	**4**
14.	Физика	Термодинамика идеального газа	4
15.	Информатика	Кодирование информации	4
		Сумма баллов:	**60**

Разберем задачи с математическим содержанием, в том числе и междисциплинарные.

1. Операции над множествами

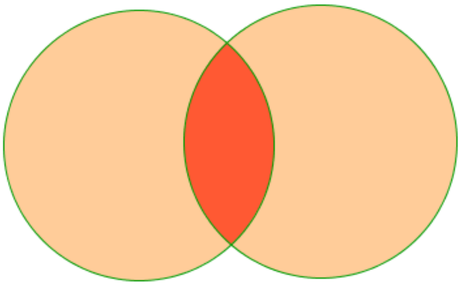
Задания МИ Конкурса межпредметных навыков и знаний проверяют в том числе и умение решать задачи на индукционное представление информации. Для успешного решения таких задач необходимо ознакомиться с основами теории множеств, уметь совершать операции над множествами.

Пересечением двух множеств *А* и *В* называют множество всех элементов, которые входят и во множество *А,* и во множество *В*. Обозначают: $A \cap B$.

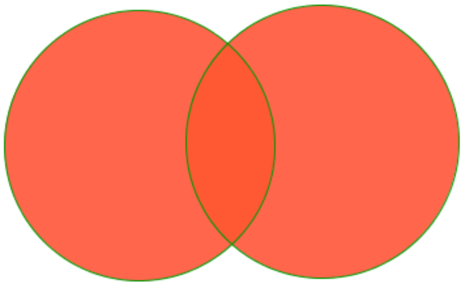
Объединением двух множеств *А* и *В* называют множество всех элементов, которые входят по меньшей мере в одно из множеств *А* или *В*. Обозначают: $A \cup B$.

Пример. Пусть $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$. Тогда $A \cap B = \{2;\ 4\}$, $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8\}$.

При решении задач на пересечение и объединение множеств часто множества изображают кругами. Эти круги называют ***кругами Эйлера*** по имени широко пользовавшегося ими Леонарда Эйлера. Тогда пересечение множеств A и B изобразится как общая часть этих кругов, а объединение – как множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества B.



A∩B



A ∪ B

Свойства операций над множествами:

1. Для любого множества Aвыполняются равенства:$A \cap A = A$, $A \cup A = A$.
2. Пересечение любых множеств A и B включается в каждое из них, а каждое из этих множеств включается в их объединение: $A \cap B \subset A$, $A \subset A \cup B$.
3. Для любых множеств A и B, где A есть подмножество B, т.е. $A \subset B$, их пересечение равно более узкому. А объединение – более широкому из них:

$$A \cap B = A, \quad A \cup B = B.$$

Задача 1.1. Найдите пересечение множеств $A = \{1; 4; 7; \dots; 898\}$, $B = \{1; 5; 9; \dots; 897\}$, $C = \{1; 6; 11; \dots; 896\}$.

Решение. Имеем$A = \{a_k = 1 + 3(k-1), k = 1, \dots, 300\}$, $B = \{b_k = 1 + 4(k-1), k = 1, \dots, 225\}$, $C = \{c_k = 1 + 5(k-1), k = 1, \dots, 180\}$. Пересечением этих множеств также будет арифметическая прогрессия с разностью $d = \text{НОК}\{3,4,5\} = 60$, следовательно, $A \cap B \cap C = \{1; 60; 121; \dots; 841\}$.

Задача 1.2. Найдите множества A и B, если $A \cap B = \{1; 2; 3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Решение. $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ или $B = \{1; 2; 3\}$, $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$ или $B = \{1; 2; 3; 4\}$, $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

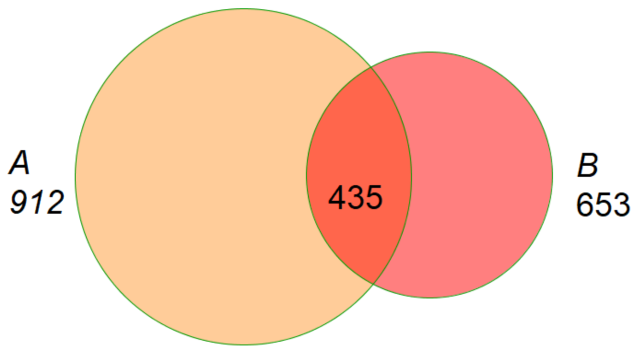
Задача 1.3. Известно, что $A \cap B = \{1; 2\}$, $A \cap C = \{2; 5\}$, $A \cup B = \{1; 2; 5; 6; 7; 9\}$, $B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$. Найдите множества A,Bи С.

Решение.

элемент / множество	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	+	+	-	-	+	+	-	-	+
B	+	+	-	-	-	-	+	-	-
C	-	+	+	+	+	-	- или +	+	-

Ответ: $A = \{1; 2; 5; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{2; 3; 4; 5; 8\}$, или $A = \{1; 2; 5; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{2; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

Задача 1.4. В одном башкирском селе каждый житель говорит или по-башкирски, или по-русски, или на обоих языках, 912 жителей села говорят по-башкирски, 653 по-русски, причем 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом селе?



Решение. Применим круги Эйлера. Через A обозначим множество жителей села, которые говорят по-башкирски, через B - множество жителей, которые говорят по-русски. Будем обозначать число элементов любого конечного множества A через $n(A)$. Тогда по условию $n(A) = 912,\quad n(B) = 653,\quad n(A \cap B) = 435.$ Нам нужно найти число элементов в объединении множеств A и B. Получаем

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 912 + 653 - 435 = 1130.$ Ответ: 1130.

Теорема. Для любых множеств A и B, состоящих из конечного числа элементов верно равенство $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Задача 1.5. Множество A имеет 100 элементов, являющимися натуральными числами, каждое из которых делится или на 2, или на 3, причем 70 элементов из A делятся на 2 и 48 – на 3. Сколько элементов множества A делятся на 6?

Ответ: 70+48 -100=18.

<u>Задача 1.6. (решение задания 12 демонстрационного варианта)</u>

Во множестве всех двузначных натуральных чисел даны три подмножества:

A = {x делится на 7},

B = {x не делится ни на 2, ни на 5},

C = {x < 40}.

Сколько чисел, принадлежащих ровно двум из этих трёх множеств?

Решение. Есть три взаимно исключающих случая:

(A∩B)\C = {49, 63, 77, 91}.

(A∩C)\B = {14, 28, 35}.

(B∩C)\A = {все числа с первой цифрой 1, 2, 3 и второй цифрой 1, 3, 7, 9, за исключением 21}. Таких чисел 3·4–1 = 11.

<u>Ответ: 18 чисел.</u>

<u>Задача 1.7. (решение задания 13 демонстрационного варианта)</u>

Сколько натуральных чисел, кратных 40, являются делителями 888800000 ?

Решение. Разложим на простые множители:

$$888800000 = 8 \cdot 1111 \cdot 10^5 = 2^8 \cdot 5^5 \cdot 11 \cdot 101, \quad 40 = 2^3 \cdot 5.$$

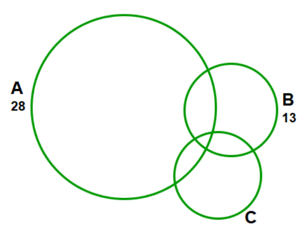
Искомые числа должны иметь в своём разложении на простые множители от 3 до 8 двоек, от 1 до 5 пятёрок, 0 или одно 11, 0 или одно 101.

Получаем 6·5·2·2 = 120 возможностей.

Ответ: 120 чисел.

Формула включений и исключений

Задача 1.8. Большая группа туристов выехала в заграничное путешествие. Из них владеют английским языком 28 человек, французским – 13, немецким – 10, английским и французским – 8, английским и немецким – 6, французским и немецким – 5, всего тремя языками – 2, а 41 человек не владеет ни одним из трех языков. Сколько туристов в группе?



Решение. Обозначим множество туристов группы, которые владеют английским, французским или немецким языком, соответственно через A, B и C. По условию

$$n(A) = 28, n(B) = 13, n(C) = 10, n(A \cap B) = 8,$$
$$n(A \cap C) = 6, n(B \cap C) = 5, n(A \cap B \cap C) = 2.$$

Сначала найдем число туристов, которые владеют по меньшей мере одним из трех иностранных языков, т.е. $n(A \cup B \cup C)$. Для этого применим круги Эйлера.

Подсчитаем сумму $n(A) + n(B) + n(C)$. Так как в нем каждое из чисел $n(A \cap B), n(A \cap C)$ и $n(B \cap C)$ вошло слагаемым два раза, то от этой суммы нужно отнять сумму $n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$.

Теперь выясним, сколько раз в полученное выражение

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

входит слагаемым число $n(A \cap B \cap C)$. Оно входит в эту сумму три раза со знаком плюс (в каждое из слагаемых $n(A), n(B), n(C)$) и три раза со знаком минус (в каждое из слагаемых $n(A \cap B), n(B \cap C), n(A \cap C)$). Следовательно, чтобы не потерять тех туристов, которые входят во множество $n(A \cap B \cap C)$, нужно еще прибавить число $n(A \cap B \cap C)$. Получаем:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Тогда будем иметь $n(A \cup B \cup C) = 28 + 13 + 10 - 8 - 6 - 5 + 2 = 34$. Значит общее число туристов группы равно $34 + 41 = 75$. Ответ: 75.

Теорема (формула включений и исключений). Для любых конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_k$ справедлива следующая формула

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \cdots - n(A_{k-1} \cap A_k) + +n(A_1 \cap$$

Задача 1.9. В течение некоторого времени число дождливых дней было равно 10, ветреных – 8, холодных – 6, дождливых и ветреных – 5, дождливых и холодных – 4, ветреных и холодных – 3 и, наконец, дождливых, ветреных и холодных – 1. Сколько было всего дней с плохой погодой?

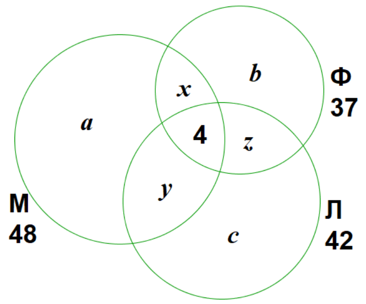
Ответ: 13.

Задача 1.10. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический вуз, оценку «отлично» получили по математике – 48 человек, по физике – 37, по литературе – 42, по математике или физике – 75, по математике или литературе – 76, по физике или литературе – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили только одну оценку «отлично»? Ровно два «отлично»? По меньшей мере одно «отлично»?

Решение. Применим круги Эйлера. Через М, Ф, и Л обозначим множества абитуриентов, сдавших на «отлично» соответственно математику, физику или литературу, эти множества по условию имеют соответственно 48, 37 и 42 элемента. Общая часть всех трех множеств имеет 4 элемента. Обозначим через a, b, c, x, y, z число абитуриентов, которые получили оценку «отлично» по одному или двум из трех предметов. Приходим к системе:

$$\begin{cases} a + x + y = 44, \\ b + x + z = 33, \\ c + y + z = 38, \\ a + b + x + y + z = 71, \\ a + c + x + y + z = 72, \\ b + c + x + y + z = 62. \end{cases}$$

Нам нужно найти суммы $a + b + c$и $x + y + z$. Для их нахождения сложим сначала три первых, а затем три последних уравнения системы:



$$\begin{cases} a + b + c = 2(x + y + z) = 115, \\ 2(a + b + c) + 3(x + y + z) = 205. \end{cases}$$

Решая систему, находим $a + b + c = 65, x + y + z = 25$.

Ответ: 65, 25, 94.

Задача 1.11. На занятии физического кружка, насчитывавшего 10 членов, учитель спросил, выписывают ли члены кружка журналы «Квант» (К), «Техника молодежи» (Т) и «Юный техник» (Ю). Оказалось, что 6 человек выписывают К, 5 – Т, 5 – Ю, 3 – К и Т, 3 – К и Ю, 2 – Т и Ю, а один человек не выписывает ни одного из трех журналов. Сколько членов кружка выписывают только один журнал? Два? Все три журнала?

Ответ: 4, 5, 1.

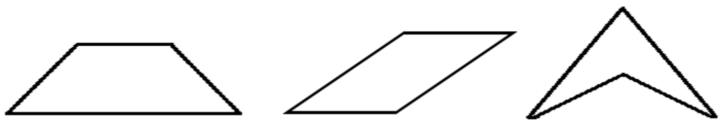
<u>Задача 1.12. (решение задания 5 демонстрационного варианта)</u>

Даны три утверждения о 4-угольнике на плоскости:

1) он выпуклый,
2) он имеет ось симметрии,
3) он имеет две пары равных сторон.

Какое из этих утверждений следует из конъюнкции двух других?

Решение: можно построить контрпримеры



(1)(2) не (3) (1)(3) не (2) (2)(3) не (1)

<u>Ответ:</u> никакое.

2. Некоторые логические задачи

Задачу №5 теоретической части предпрофессионального экзамена этого года можно отнести к логическим задачам. Рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть на плоскости даны n точек ($n \geq 3$), из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит через две из данных точек?

Прямую можно рассматривать как неупорядоченную пару точек (прямая AB совпадает с прямой BA). Через любую из n точек можно провести $n-1$ прямую, соединяющую эту точку с остальными $n-1$ точками. Таким образом, получим $(n-1)n$. Поскольку при таком подсчете каждая прямая повторяется два раза, то число прямых будет равно $\frac{(n-1)n}{2}$. Задачи, по существу совпадающие с рассмотренной выше, встречаются довольно часто. Например, в шахматном турнире в один круг играют nигроков. Сколько всего они провели встреч? Или другая задача. Встретились nдрузей и обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

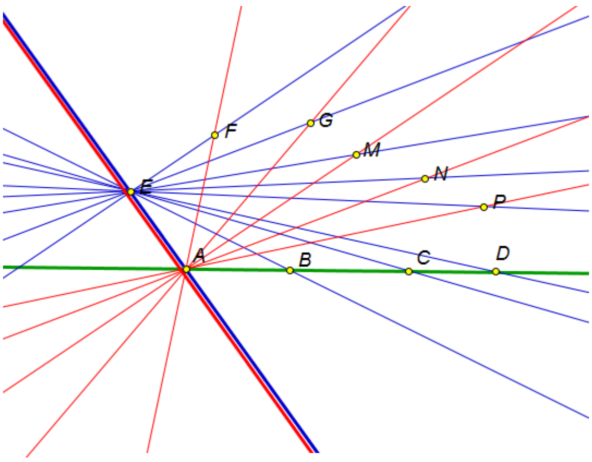
Эту же модельную задачу можно решить, используя формулы комбинаторики. Необходимо определить **число сочетаний** из n элементов (точек) по два (через любую пару точек без учета порядка проходит одна прямая). Воспользуемся формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}, C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Таким образом, число прямых равно $\frac{(n-1)n}{2}$.

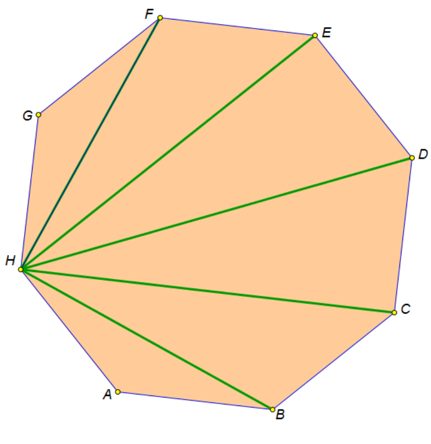
Задача 2.1. На плоскости даны 10 точек, из которых ровно четыре лежат на одной прямой, а из остальных никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит или через две, или через четыре из данных точек?

Решение. Пусть *A, B, C, D* – точки, которые лежат на одной прямой. Тогда через каждую из шести точек, не совпадающих с *A, B, C, D* можно провести 9 прямых. Через каждую из точек *A, B, C, D* можно провести шесть различных прямых, не считая ту, на которой лежат эти четыре точки. С учетом, что каждую из перечисленных прямых посчитали дважды, добавив прямую *AB*, получаем



Задача 2.2. Сколько всего диагоналей у выпуклого многоугольника, имеющего n сторон?

Решение. Каждую из n вершин выпуклого многоугольника можно соединить диагоналями с $n-3$ другими вершинами. Количество всех диагоналей равно $(n-3)\,n/2$.



Задача 2.3. Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый из них был связан ровно с 11 другими?

Решение. Нельзя, поскольку телефонных линий, связывающих между собой эти телефоны, было бы $15 \cdot 11/2$,что не является целым числом.

Задача 2.4. На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: 1 сек., 2 сек., 3 сек., 4 сек., 5 сек., 6 сек. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз. Определите число представленных на соревнованиях механизмов.

Решение. Пусть на соревнования было представлено n роботов. Так как для каждой пары роботов показания измерений оказались разными, то всего было 6 различных пар. С другой стороны, число пар которое можно составить из nроботов равно $\frac{(n-1)n}{2}$. Следовательно, $\frac{(n-1)n}{2} = 6$, или $n^2 - n - 12 = 6$, $n = 4$. Ответ: 4.

Задача 2.5. На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали соревноваться попарно. Каждая пара выбирала собственную трассу для соревнования. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Всего в протоколе была сделана 21 запись. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз. Определите число представленных на соревнованиях механизмов.

Решение. Пусть на соревнования было представлено n роботов. Так как в протоколе была сделана 21 запись, то всего была 21 различная пара роботов. С другой стороны, число

п

аили $n^2 - n - 42 = 0, n = 7$. Ответ: 7.

р **Задача 2.6. (решение задания 5 демонстрационного варианта)**

Даны три утверждения о 4-угольнике на плоскости:

к 4) он выпуклый,
о 5) он имеет ось симметрии,
6) он имеет две пары равных сторон.

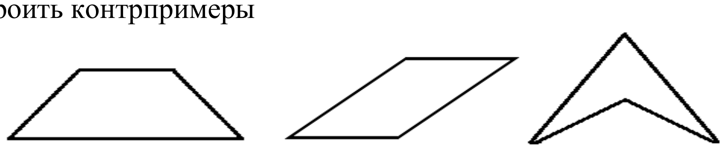
т

о Какое из этих утверждений следует из конъюнкции двух других?

р *Решение:* можно построить контрпримеры

о

е



(1)(2) не (3) (1)(3) не (2) (2)(3) не (1)

м

Ответ: никакое.

о

ж

н

о

3. Экстремальные задачи

Задание №10 предпрофессионального экзамена проверяет умение проводить экстремальные оценки. Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения величин обычно называют задачами на нахождение экстремумов или задачами на оптимизацию. Такие задачи общепризнано являются важными как для самой математики и ее приложений, так и для практической деятельности человека. В жизни постоянно приходится сталкиваться с необходимостью принять наилучшее (оптимальное) решение. Огромное число подобных проблем возникает в физике и других областях естествознания, в технике, в экономике. К такому типу задач и относится задание №7.

Для успешного решения задания №10 необходимо с помощью алгебраических преобразований уметь находить наименьшее или наибольшее значение функции, зависящей от нескольких переменных (параметров).

Решение экстремальных задач без применения производной

При решении экстремальных задач без применения производной наиболее часто используется прием ***выделения полного квадрата***.

Пусть дан квадратный трехчлен $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c$, где $a\neq 0$. Его требуется преобразовать к виду a где m и n- некоторые числа. Этот прием и называют выделением полного квадрата. Для этого проведем следующие преобразования

$$\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

Задача 3.1. Пусть a,b – произвольные действительные числа. Какое наибольшее значение может принимать выражение $6-4a^2-2b^2-8a+2b$?

Решение. Приведем данное выражение к виду $6-(4a^2+8a)-(2b^2-2b)$, заключив в скобки одночлены, содержащие одинаковые буквы. В каждом выражении в скобках выделим полный квадрат:

$$4a^2+8a=4(a^2+2a+1-1)=42b^2-2b=2\left(b^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot b+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$6-(4a^2+8a)-(2b^2-2b)=6-4(a+1)^2+4-2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=$$

$$10,5-4$$

Последняя оценка следует из неравенств 4и $2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$,которые выполняются для любых действительных чиселa иb. Причем равенство достигается при $a=-1$ и $b=0{,}5$. Ответ: 10,5.

Задача 3.2. В логистике затраты на доставку некоторого оборудования складываются из затрат на транспорт и хранение, которые определяются факторами a и b. Эти факторы могут принимать любые неотрицательные значения. Какие наименьшие затраты можно заложить на доставку оборудования по полученному заказу, если зависимость этих затрат задается формулой $2a^2+4b^2-2a+5$? Чему при этом равно значение факторов?

Решение. Для решения задачи необходимо найти наименьшее значение выражения$2a^2+4b^2-2a+5$ при неотрицательных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$2a^2+4b^2-2a+5=2a^2-2a+4b^2+5=2\left(a^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot a+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+4b^2+5=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+4b^2+$$

причем равенство достигается при $a=0{,}5$ и $b=0$.

Ответ:

Наименьшие затраты	Значение фактора транспорта	Значение фактора хранения
4,5	0,5	0

<u>Задача 3.3. (решение задания 7 демонстрационного варианта 2019 года)</u>

Фирма выпускает два вида продукции объемами a и b. Эти объемы выпуска могут принимать любые натуральные значения. Какую наибольшую прибыль может получить фирма, если зависимость прибыли от объемов выпуска продукции задается формулой $7-a^2-b^2+4a+6b$?

Решение. Для решения задачи необходимо найти наибольшее значение выражения $7-a^2-b^2+4a+6b$ при натуральных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$7-(a^2-4a+4-4)-(b^2-6b+9-9)=20-(a-2)^2-(b-3)^2\leq 20,$$

причем равенство достигается при $a=2$ и $b=3$. Ответ: 20.

Решение экстремальных задач с применением производной

Точку x_0 называют ***точкой минимума*** функции f, если существует такой интервал $(a;b)$, содержащий x_0 $(x_0 \in (a;b))$, что для всех $x \in (a;b)$ выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$

Точку x_0 называют ***точкой максимума*** функции f, если существует такой интервал $(a;b)$, содержащий x_0 $(x_0 \in (a;b))$, что для всех $x \in (a;b)$ выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$

Точки максимума и минимума называют ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами функции***.

Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называют ***критическими точками*** этой функции.

Необходимый признак экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f', то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ в некотором интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) < 0$ в некотором интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) < 0$ в некотором интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ в некотором интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Известно, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция f принимает на этом отрезке ***наибольшее и наименьшее значения***, т.е. существуют точки отрезка $[a;b]$, в которых f принимает наибольшее и наименьшее на $[a;b]$ значения. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 3.4 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 12x - 9x^2 + 2x^3$ на промежутке [0; 2].

Решение. В любой точке отрезка [0; 2] функция $f(x) = 12x - 9x^2 + 2x^3$ имеет производную $f'(x) = 12 - 18x + 6x^2$.

Найдем нули производной $x^2 - 3x + 2 = 0, x = 1, x = 2$. Обе точки принадлежат отрезку [0; 2]. Находим значения функции f в нулях производной и на концах отрезка: $f(0) = 0, f(1) =$

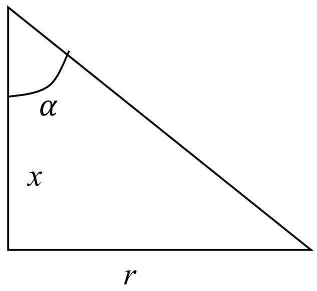
$5, f(2) = 4$.Выбираем наибольшее и наименьшее значения: $y_{\text{наиб}} = 5, y_{\text{наим}} = 0$. Ответ: $y_{\text{наиб}} = 5, y_{\text{наим}} = 0$.

Задача 3.5. На какой высоте нужно установить фонари, чтобы как можно лучше осветить улицу, если расстояние между соседними фонарями 30м?

Решение. Из курса физики известно, что освещенность плоскости обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна косинусу угла падения

$$f(x) = \frac{(k\cos\alpha)}{(x^2+r^2)} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} \qquad f(x) = \frac{kx}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Исследуем функцию f на наибольшее значение.



Находим производную данной функции:

$$f'(x) = \frac{k(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot kx}{(x^2+r^2)^3} =$$

$$\frac{k(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}} - 3kx^2(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+r^2)^3} = \frac{k(x^2+r^2-3x^2)}{(x^2+r^2)^{2,5}} = \frac{k(r^2-2x^2)}{(x^2+r^2)^{2,5}}$$

Находим критические точки функции:

$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = 2x^2\ ; \qquad x = \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0.7r$$

Таким образом, фонари на улице, если расстояние между ними 30м (r = 15), целесообразно установить на высоте 10, 5 м. **Ответ:** 10,5 м.

Задача 3.6. Проектируется канал оросительной системы с прямоугольным сечением в 4,5 м^2. Каковы должны быть размеры сечения, чтобы для облицовки стенок и дна пошло наименьшее количество материала?

Решение. Пусть стенки канала имеют длину x м, а дно канала y м, l – длина канала, S – площадь стенок канала. Тогда

$$\text{xy} = 4{,}5,\ \ y = \frac{9}{2x}, S(x) = 2\text{lx} + \text{ly} = l\left(2x + \frac{9}{2x}\right).$$

Найдем производную:

$$S'(x) = l\left(2 - \frac{9}{2x^2}\right) = l\frac{4x^2-9}{2x^2} = l\frac{(2x-3)(2x+3)}{2x^2}.$$

Решаем уравнение $S'(x) = 0$. Так как $S > 0$, и длина канала l - положительное число, то $x = 1{,}5$. Легко убедиться, что при данном x значение S минимально.

Ответ: x=1,5 м, y=3 м.

Задача 3.7 (решение задания 10 демоварианта 2022 года):

Какую высоту должен иметь прямой круговой цилиндр объёмом π, чтобы площадь всей его поверхности была минимальной?

Решение. Пусть радиус основания R, высота h, тогда

$$\text{объём} = \pi R^2 h = \pi, \text{ отсюда } h = 1/R^2,$$

$$\text{площадь всей поверхности} = 2\cdot\pi R^2+2\pi Rh = 2\pi(R^2+1/R).$$

Приравняем к 0 производную выражения в скобках:

$$2R-1/R^2 = 0, \quad \text{следовательно,} \quad R = 2^{-1/3}.$$

Ответ: $\mathbf{h = 4^{1/3}}$.

4. Элементы теории вероятностей

Задание №6 ИМ предпрофессионального экзамена проверяет умение использовать явно заданную информацию для проведения расчетов, применяя методы теории вероятностей. Для успешного решения таких задач необходимо иметь представление о понятии классической вероятности.

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события. ***Случайным событием*** называют событие, которое при осуществлении некоторых условий, говорят опыта или эксперимента, может произойти или не произойти. Например, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием. Событие называют ***достоверным***, если в результате испытания оно обязательно происходит. ***Невозможным*** называют событие, которое в результате испытания произойти не может. Случайные события называются ***несовместными*** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе. Случайные события образуют ***полную группу***, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Элементарным исходом (или ***элементарным событием***) называют любой простейший (неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов называют ***пространством элементарных исходов***.

Множество исходов опыта образует пространство элементарных исходов, если выполнены следующие требования:

- в результате опыта один из исходов обязательно происходит;
- появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;
- в рамках данного опыта нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

Любой набор элементарных исходов, или иными словами, произвольное подмножество пространства элементарных исходов, образует случайное событие.

Пусть пространство элементарных исходов содержит конечное число N элементарных исходов, причем все они ***равновозможны***, т.е. в силу условий проведения опыта можно считать, ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. Пусть N_A – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению событию A. Исход называют ***благоприятствующим*** появлению события A, если появление этого события влечет за собой появление события A.

Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов, т.е.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Данное определение вероятности принято называть ***классическим определением вероятности.***

Вероятность достоверного события равна единице. Вероятность невозможного события равна нулю. Вероятность случайного события A есть число, удовлетворяющее неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

Пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара. Из урны наугад извлекается один шар, необходимо найти вероятность того, что он будет: а) красным, б) чёрным, в) его номер будет четным числом, г) черным и его номер будет четным числом. Количество всех элементарных исходов $N = 8$.

а) Пусть событие A – извлеченный шар оказался красным. Поскольку количество красных шаров в урне равно $N_A = 3$, то $P(A) = \frac{3}{8} = 0,375$.

б) Пусть событие A – извлеченный шар оказался черным. Поскольку количество черных шаров в урне равно $N_A = 5$, то $P(A) = \frac{5}{8} = 0,625$.

в) Пусть событие A – извлеченный шар оказался четным номером. Поскольку количество шаров с четными номерами в урне равно $N_A = 4$, то $P(A) = \frac{4}{8} = 0,5$.

г) Пусть событие A – извлеченный шар оказался черным с четным номером. Поскольку количество черных шаров с четными номерами в урне равно $N_A = 2$, то $P(A) = \frac{2}{8} = 0,25$.

Задача 4.1. (решение задания 10 ИМ демонстрационного варианта 2019 года)

В кибернетике используется понятие информационной энтропии, которая определяется формулой $H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$, где H – информационная энтропия, p_i – вероятность каждого из возможных исходов.

В корзине лежат 36 клубков шерсти, из них 9 красных, 18 синих и 9 зеленых. Какова информационная энтропия сообщения о том, что случайно выбран 1 клубок?

Решение. В данном опыте возможны следующие исходы (случайные события), образующие полную группу:

1) событие A_1 – выбран клубок красного цвета;
2) событие A_2 – выбран клубок синего цвета;
3) событие A_3 – выбран клубок зеленого цвета.

Вычислим вероятности p_1, p_2, p_3 событий A_1, A_2, A_3 соответственно. Число всех возможных элементарных исходов данного опыта равно $N = 36$.

Поскольку в корзине лежат $N_1 = 9$ красных шаров, то $p_1 = P(A_1) = \frac{9}{36} = 0,25$.

Поскольку в корзине лежат $N_2 = 18$ синих шаров, то $p_2 = P(A_2) = \frac{18}{36} = 0,5$.

Поскольку в корзине лежат $N_3 = 9$ зеленых шаров, то $p_3 = P(A_3) = \frac{9}{36} = 0,25$.

Вычислим информационную энтропию сообщения о том, что случайно выбран 1 клубок:

$$H = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - p_3 \log_2 p_3 =$$
$$= -\frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Ответ: 1,5.

Задача 4.2. В библиотеке имеется 1600 книг, из них 400 по математике, 800 по физике, 200 по информатике и 200 по химии. Какова информационная энтропия сообщения о том, что случайно выбрана 1 книга?

Решение. В данном опыте возможны следующие исходы (случайные события), образующие полную группу:

1) событие A_1 – выбрана книга по математике;
2) событие A_2 – выбрана книга по физике;
3) событие A_3 – выбрана книга по информатике;
4) событие A_4 – выбрана книга по химии.

Вычислим вероятности p_1, p_2, p_3, p_4 событий A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно. Число всех возможных элементарных исходов данного опыта равно $N = 1600$.

Поскольку в библиотеке имеется N_1 = 400 книг по математике, то $p_1 = P(A_1) = \frac{400}{1600} = 0,25$.

Поскольку в библиотеке имеется N_2 = 800 книг по физике, то $p_2 = P(A_2) = \frac{800}{1600} = 0,5$.

Поскольку в библиотеке имеется N_3 = 200 книг по информатике, то $p_3 = P(A_3) = \frac{200}{1600} = 0{,}125$.

Поскольку в библиотеке имеется N_4 = 200 книг по химии, то $p_4 = P(A_4) = \frac{200}{1600} = 0{,}125$.

Вычислим информационную энтропию сообщения о том, что случайно выбрана 1 книга:

$$H = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - p_3 \log_2 p_3 - p_4 \log_2 p_4 =$$
$$= -\frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log_2 \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{14}{8} = 1{,}75$$

Ответ: 1,75.

Методические рекомендации по теоретической части
Московского конкурса межпредметных навыков и знаний
Задача 4.3. (решение задания 6 демонстрационного варианта 2022 года)

В группе 10 туристов, из них 4 Андрея и 3 Василия, у остальных имена разные. Случайно выбрали четверых идти за дровами. С какой вероятностью среди них будет поровну Андреев и Василиев?

Решение. Выбрать 2 Андреев и 2 Василиев число способов $C_4^2 \cdot C_3^2 = 6 \cdot 3 = 18$.

Выбрать 1 Андрея, 1 Василия и 2 других число способов $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Выбрать 4 не Андреев не Василиев невозможно. Итого 54 способа.

Общее число способов выбрать четверых $C_{10}^4 = 210$. Вероятность = 54/210 = 9/35.

Ответ: 9/35.

Оглавление